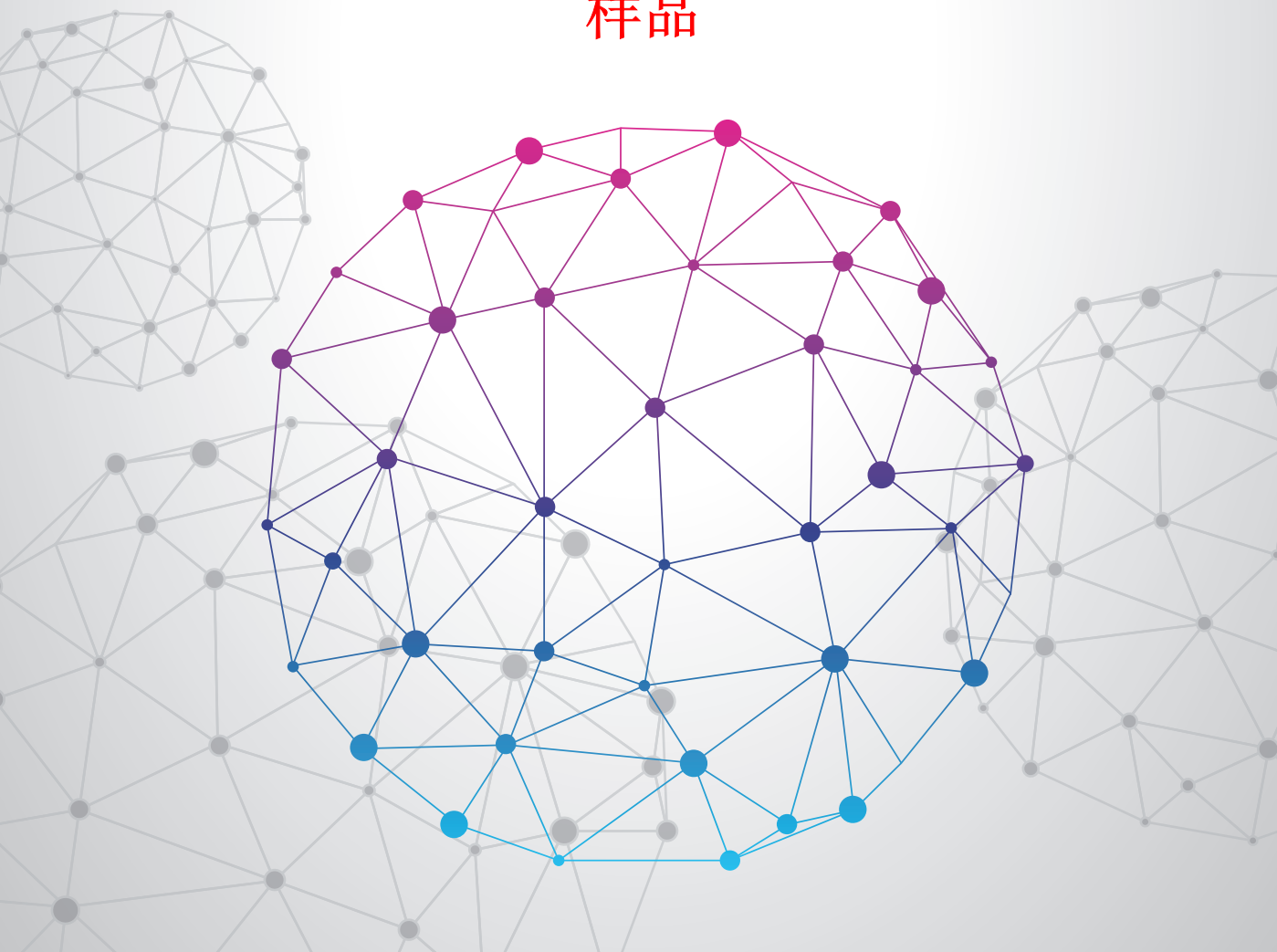


小·时百科

专业易用的数理百科

<http://wuli.wiki>

样品



致乐于分享知识的人

版权声明

这是小时百科 pdf 样板，只有完整 pdf 的一小部分内容，一些链接无效。小时物理百科项目的官方网站为 wuli.wiki，网站上免费提供本书的完整网页版。未经同意，请勿以任何方式转载本项目内容（包括插图，代码，网页等）。版权所有，保留一切权利。

小时物理百科

简介

小时物理百科（以下简称百科）从结构上尝试将教材和百科这两种不同形式的文本融合到一起，使其既适合初学者自学，又可按照非常灵活的顺序阅读。百科计划涵盖物理专业本科课程中的大部分内容，适用于具有普通高中及以上数学物理水平的读者。也正因为如此，百科是一个庞大的工程，短时间内很难被完成，所以百科将长期处于更新状态。为保证阅读质量，请定期从项目网站下载最新版。

在介绍百科的特点以前，我们先来看一般数理教材的不足：

1. 需要按顺序学习，不适合初学者快速了解或查找某个话题或知识点。例如某高中生需要了解角动量的概念，直接翻开力学书的相关章节发现看不懂，却又不知道需要先学什么，也没时间从头先看完高等数学和线性代数的教材再开始学习。
2. 读者不能自己掌握所学内容的深度和严谨性。例如许多高等数学教材在读者对微积分还没有一个大概的了解时就介绍极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义，微分/积分中值定理，可微，可积等。这些内容对物理的初步学习来说显得过于严谨，会极大加重学习成本。
3. 不够自洽（self-contained）。一本教材的自洽性指目标读者在学习前是否还需要学习其他教材。大部分本科物理教材对高中生都是不自洽的，因为它们往往假设读者具有一定的微积分和线性代数基础。

再来看一般网络百科（如百度百科或维基百科）的不足：

1. 每个词条都大而全，涵盖词条标题的所有相关内容。
2. 读者同样不能自己掌握所学内容的深度和严谨程度。
3. 容易出现公式定理的堆积，缺乏知识点导入和讲述，缺乏例题，习题等。

为了克服上述困难，百科采用以下形式：

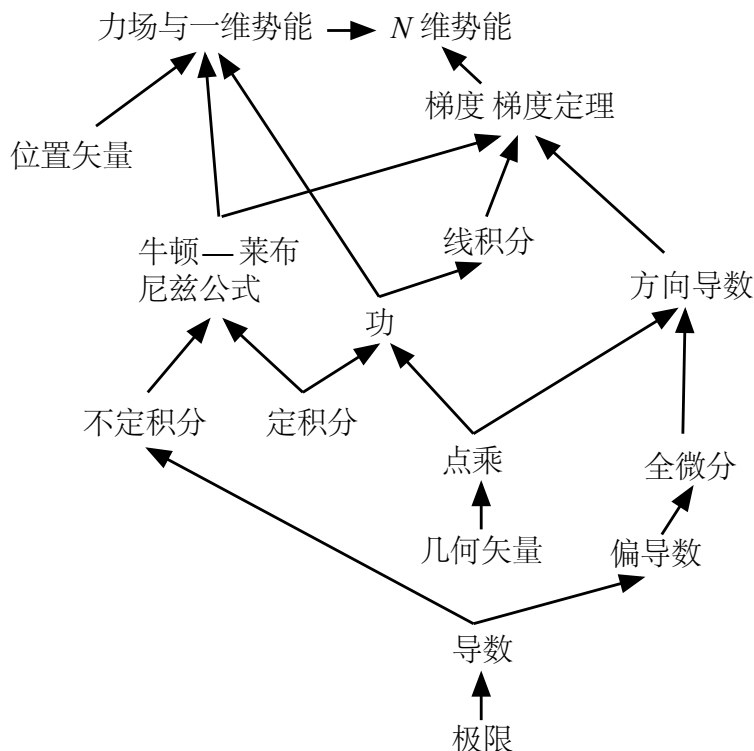


图 1: 由“预备知识”画出的知识树（目标词条为“力场 势能^[226]”）

1. 将知识点划分为词条，且在每个词条中列出学习该词条前需要先学习哪些词条。这样相当于建立了一个知识树（如图 1）。项目网站 wuli.wiki 上可以自动生成任意目标词条的知识树。
2. 采用词条分级，把同一个话题以不同深度，严谨度和适用范围等划分成若干个等级的同名词条。这样读者可以选择螺旋式学习（例如初中，高中，大学物理中所学的话题几乎相同，但程度不同）。暂定初级词条从科普开始，尽量少使用数学。随着词条级别升高，会使用适用范围更广的定义，更严谨的表述和更抽象的数学等。

词条

百科内容繁多，不同词条的重要性相去甚远，不建议初学者按照词条的排列顺序依次学习，而是应该以初级词条给出的主线来学习，再根据兴趣和需要阅读其余词条。

理论上来说，读者可以直接跳到最感兴趣的词条，如果“预备知识”中列出

的词条都已经掌握，就可以开始学习该词条，否则就先掌握“预备知识”中的词条。如果“预备知识”出现在词条开始，则必须先掌握，如果出现在正文中，则只有阅读该部分时需要掌握。如果正文中引用了没有出现在“预备知识”中的内容，则读者可自行决定是否阅读。

为了便于书内的跳查，词条之间进行了大量的交叉引用，例如“导数简介^[78]”右上角中括号中的数字代表被引用词条的页码。由于每个词条的公式编号都从 1 开始，引用其他词条中的公式有时会用类似“式 2^[78]”的格式，右上角的方括号中是公式所在词条的起始页码。在本书的 PDF 电子版中，点击该页码即可自动跳转到对应的页面。在电脑上阅读，推荐使用 Adobe Reader 阅读器，在苹果® 的 iOS 设备上推荐使用 GoodReader 应用（两个软件都可以在不同的面板中打开同一本书的不同页码）。在 Adobe Reader 中，使用快捷键组合“Alt + 左箭头”即可返回跳查前的位置，在移动设备的阅读软件中通常也有相应的返回按钮。由于本书的电子版是原生 PDF（区别于扫描版），还具有占用设备存储空间小，便于分享，便于查找关键字等种种优势。

目录

第一部分 科普

第一章 经典力学

经典力学及其他物理理论^[3] 经典力学^[4]

第二章 电动力学

电动力学^[11] 右手定则^[13]

第二部分 微积分

第一章 基础

集合^[17] 整数^[20] 映射^[22] 函数^[26] 阶乘^[27] 二项式定理^[27] 二项式定理（非整数幂）^[28] 直线和平面的交点^[29] 三角恒等式^[30] 双曲函数^[31] sinc 函数^[33] 充分必要条件^[33] 四象限 Arctan 函数^[35] 极坐标系^[36] 阿基米德螺线^[38] 柱坐标系^[38] 球坐标系^[39] 一元函数的对称与周期性^[42] 球坐标与直角坐标的转换^[42] 圆锥曲线的极坐标方程^[45] 椭圆的三种定义^[47] 双曲线的三种定义^[48] 抛物线的三种定义^[50] 圆锥曲线的光学性质^[52] 复数^[56] 复变函数^[60] 幂函数（复数）^[61] 指数函数（复数）^[62] 三角函数（复数）^[64] 立体角^[65]

第二章 一元微积分

微积分导航^[68] 极限^[69] 小角正弦极限^[72] 自然对数底^[73] 切线与割线^[75] 函数的连续性^[76] 导数^[78] 求导法则^[80] 反函数求导^[82] 基本初等函数的导数^[84] 高阶导数^[87] 莱布尼兹公式^[88] 导数与函数极值^[89] 用极值点确定函数图像^[90] 一元函数的微分^[92] 复合函数求导链式法则^[93] 曲率 曲率半径（平面）^[97] 导数与差分^[99] 不定积分^[101] 换元积分法^[102] 分部积分法^[104] 积分表^[106] 定积分^[111] 牛顿—莱

布尼兹公式 [115] 幂级数 [118] 极坐标中的曲线方程 [120] 函数的算符 [121]
常微分方程 [123] 一阶线性微分方程 [124] 二阶常系数齐次微分方程 [125]
一维齐次亥姆霍兹方程 [127] 二阶常系数非齐次微分方程 [128]

第三部分 线性代数

第一章 几何矢量

几何矢量 [133] 几何矢量的运算 [141] 几何矢量的内积 [146] 矢量叉乘 [149]
矢量叉乘分配律的几何证明 [152] 连续叉乘的化简 [154] 三矢量的混合积 [154]

第二章 矩阵和行列式

矩阵 [158] 叉乘的矩阵形式 [163] 矩阵的迹 [164] 矩阵的秩 [165] 证明矩阵行秩等于列秩 [166] 平面旋转矩阵 [167] 三维旋转矩阵 [169] 过渡矩阵 [170] 绕轴旋转矩阵 [172] 旋转矩阵的导数 [174] 四元数与旋转矩阵 [175] 矩阵的本征方程 [176] 对称矩阵的本征问题 [177] 相似变换和相似矩阵 [178] 行列式 [179] 行列式的性质 [182] 行列式与体积 [184]

第三章 线性方程组

高斯消元法解线性方程组 [187] 线性方程组与矢量空间 [192]

第四部分 经典力学

第一章 质点运动学

物理量和单位转换 [196] 位置矢量 位移 [198] 速度 加速度 (一维) [199] 速度 加速度 [202] 圆周运动的速度 [203] 圆周运动的加速度 [205] 匀加速直线运动 [208] 匀加速运动 [209] 匀速曲线运动 [211] 极坐标中的速度和加速度 [212] 速度的坐标系变换 [213] 加速度的坐标系变换 [215]

第二章 质点动力学

力的分解与合成 [219] 牛顿运动定律 惯性系 [220] 圆周运动的向心力 [221]

重力 重量 [223] 功 功率 [224] 动能 动能定理 (单个质点) [225] 力场 势能 [226] 机械能守恒 (单个质点) [230] 动量 动量定理 (单个质点) [231] 角动量 角动量定理 角动量守恒 (单个质点) [232] 简谐振子 [233] 受阻落体 [234] 单摆 [236] 圆锥摆 [238] 傅科摆 [238] 惯性力 [240] 滑块和运动斜面问题 [242] 离心力 [243] 科里奥利力 [244] 旋转参考系的“机械能守恒” [246]

第三章 质点系与刚体

自由度 [249] 质点系 [250] 质心 质心系 [250] 质点系的动量 [257] 刚体 [257] 轻杆模型 [259] 动量定理 动量守恒 [262] 质点系的动能 柯尼希定理 [264] 力矩 [265] 刚体的静力平衡 [268] 角动量 [269] 角动量定理 角动量守恒 [271] 二体系统 [273] 二体碰撞 [276] 刚体的绕轴转动 转动惯量 [278] 平行轴定理与垂直轴定理 [281] 常见几何体的转动惯量 [282] 刚体的平面运动方程 [285] 惯性张量 [288] 瞬时转轴 [292] 刚体绕轴转动 2 [292] 刚体的动能定理 [293] 刚体的运动方程 [294] 刚体运动方程 (四元数) [296]

第五部分 附录

第一章 附录

小时百科符号与规范 [299] 国际单位制 [300] 物理学常数 [302] 国际单位制词头 [305] 厘米—克—秒单位制 [305] 小时百科图标 [307]

第一部分

科普

第一章

经典力学

经典力学及其他物理理论

科学理论的可证伪性

著名的奥地利哲学家波普尔（Popper）对科学的划界是：一个命题是科学的，当且仅当它是可证伪的。如果有人提出一个物理理论，那么既可以尝试用它来计算已有的实验结果，也可以用它来预言一些没有做过的实验结果。如果在实验误差范围内，所有实验与理论计算得到的结果一致，那么就还没有证据表明这个理论是错误的，但也不能说它是绝对正确的。毕竟我们不可能把一个理论的每一种实验，每一套参数都做一遍。然而一旦有一个实验与该理论的计算结果不相符，那么就可以证明这个理论是错误的¹，这就是科学理论的可证伪性。

然而可惜的是，在物理学中目前还没有一个理论可以在任意范围内解释实验或观测结果，所有的理论（如经典力学，相对论，量子力学，量子场论）都只在一定的范围内成立。我们能做的仅仅是不断创造与实验符合得更精确，且适用范围更广的理论。这样一来，给一个曾经普遍接受的理论打上“错误”的标签似乎有些不妥，于是我们一般称其为在适用范围内成立。

物理理论的适用范围

本科物理学课程一般从经典力学开始，我们将其作为例子来讨论。经典力学在宏观低速的范围内适用。粗略而言，“宏观”要求物体的质量远大于原子的质量，“低速”要求物体的运动速度远小于光速。事实上还有一个条件是“弱引力场”，例如由于水星离太阳较近，引力场较强，导致其轨道与经典力学的计算出现偏差（轨道进动）。所以严格来说，经典力学是一个被证伪的理论。

若上述中只有“低速”条件不满足，我们就需要使用狭义相对论，若“弱引力场”条件不满足，就需要广义相对论（狭义相对论是广义相对论的一部分），若“宏观”条件不满足，就需要量子力学，若都不满足，那么现在还没有非常完善的理论可以计算（我们预先把它叫做万物之理，**theory of everything**）。

以相对论（狭义和广义的统称）为例，它所适用的范围既包含了经典力学

¹当然首先要考虑是否存在计算错误，实验操作失误，或者存在未考虑到的因素

适用的范围，又包含了“高速”和“强引力场”，所以原则上相对论可以完全取代经典力学。由于经典力学在适用的范围内已经得到几百年来大量的实验验证，那么如果相对论是正确的，在经典力学适用的范围内，用相对论计算问题就应该得到同样的结果²。值得注意的是，相对论提出的一些物理概念与经典力学大相径庭。经典的万有引力定律提出任何两个物体之间都存在万有引力，而相对论却指出并不存在引力，而是有质量的物体扭曲了周围的时空，使周围物体的运动方式不同。既然相对论的适用范围更广，那么至少从目前看来相对论对物理现象的解释才是更可信的，而经典力学的解释是错误的。

既然如此，为什么我们还要先学习经典力学呢？首先无论在概念上还是数学上，经典力学比相对论简单得多。其次在日常生活或生产中我们接触的绝大部分运动都在经典力学的适用范围内。第三，相对论中同样会出现“参考系”，“速度”，“能量”，“动量”，等概念，这些概念只有先学习经典力学才会有一个初步的认识，才能继续学习相对论。最后，通过学习经典力学可以了解物理中常见的数学工具，包括一些基础的微积分，矢量分析，线性代数等，这些数学在物理的其他领域更是无处不在。

以上论述同样适用于量子力学与经典力学的关系。量子力学除了在经典力学的范围适用，还描述了微观粒子的运动。总而言之经典力学在现代的物理学中只是一个简单的近似模型，提出的一些原理并不正确，公式也只是一种近似。一些民间科学家（俗称民科）时常企图推翻牛顿定律，显然是还不了解这点。

另一方面，即使是相对论和量子力学也并非完美无瑕，通常所说的量子力学是指“非相对论量子力学”，即同样要求“低速”和“弱引力场”。量子场论（**Quantum Field Theory**）结合了量子力学和狭义相对论，但仍然没有解决“强引力场”的问题。

经典力学

预备知识 物理理论^[3]

²准确来说，二者计算结果的误差需要在实验的测量误差范围内。

经典力学

经典力学描述的是满足宏观低速弱引力场条件下，若干的粒子（即质点）受若干力以后的运动情况。质点没有转动的概念，只能移动，任何大小不可忽略的物体都可以看作由相互作用的质点组成，所以经典力学可以描述任何宏观低速物体的运动。

牛顿三定律^[220] 可以作为经典力学的公设。公设在这里指的是某个理论体系内的基本假设。由这些假设再加上数学推导可以得出理论体系中的所有推论，例如动量定理^[262]，角动量定理^[271]，动能定理^[225]，开普勒三定律^[?] 等。公设本身无法被推导而来³，只能通过实验验证。

我们可以将牛顿三定律想象成一个懂经典力学的电脑，只需输入初始时刻所有粒子的状态（位置和速度/动量），以及每个粒子的受力情况/势能函数，就可以得到接下来每个粒子的运动方式（位置关于时间的函数）。我们在研究某个问题时，往往把讨论范围内的粒子叫做**系统**。

例如我们要研究太阳系中行星的运动，就把太阳系内的天体看成是系统内，把宇宙中其他所有天体视为系统外。另外我们往往把这些行星看作是粒子（质点），这是因为比起他们的距离来，他们本身的大小可以忽略不计⁴。这个问题中，如果我们选择合适的参考系，系统外对系统内的作用也可以忽略不计。

我们只要知道某时刻（初始时刻）它们的位置和动量⁵，将它们输入“牛顿三定律”这台电脑中，就可以得到接下来所有天体的运动情况，即任意时刻任意粒子的位置和动量。

刚体

质点的模型忽略了物体的实际大小，如果要考虑一个大小不可忽略的物体的转动，以及若干个大小不可忽略的物体之间的相互作用该怎么办？事实上，这些物体也是由原子和分子构成的⁶。在固体中，原子之间的作用力使它们相

³ “无法被推导”是在这个理论内部而言的。一个理论的基本假设可以由更高级，使用范围更广的理论的基本假设推导出来。例如牛顿第二定律可以由狭义相对论或量子力学的基本假设推导而来。

⁴ 在物理中，我们经常使用这种手段简化问题，并将其称为**近似**

⁵ 在大学物理中，你会发现我们更多地使用动量而不是速度，在已知质量的情况下，它们所包含的信息是一样的，即一一对应

⁶ 经典力学不能准确描述原子的结构和运动，要使用量子力学，但我们这里讨论的是组成物体后的宏观运动，所以即使用经典力学来描述原子得到的宏观运动也是正确的

对位置较难改变，例如可以想象每个原子和与它相邻的原子都以较硬的弹簧相连。所以，我们同样可以把这些物体看作是由质点组成得。这样，我们就可以用质点的力学来描述有形状有质量分布的物体了。在力学中我们经常使用一种理想模型叫做**刚体 (rigid body)**，即假设物体中连接这些质点的弹簧的劲度系数为无限大，或者把他们看成不可伸缩的棍子。所以如果我们近似认为一个物体无限硬，忽略其自身的形变，我们就可以用刚体的模型来描述它。

受力决定运动

经典力学中最简单的一类问题是：已知初始时刻若干粒子的运动状态，以及接下来每一个粒子的受力。以直线运动为例， F 随时间 t 的变化（即函数 $F(t)$ ）。根据牛顿第二定律，可以求出每个粒子任意时刻的加速度 a （正比于 F ），进而求出速度 v 随时间的变化，也就是求“加速度—时间”曲线下面在某段时间的面积（这在数学上叫做**定积分**）。有了速度随时间的变化，我们又可以通过面积求位置随时间的变化（同样是定积分，求“速度—时间”曲线下面的面积）。例如我们知道一个沿直线运动的粒子受一个恒力（例如自由落体），它的加速度是恒定的，这个过程如图 1。这种方法适用于任何形状的 $F(t)$ 曲线。

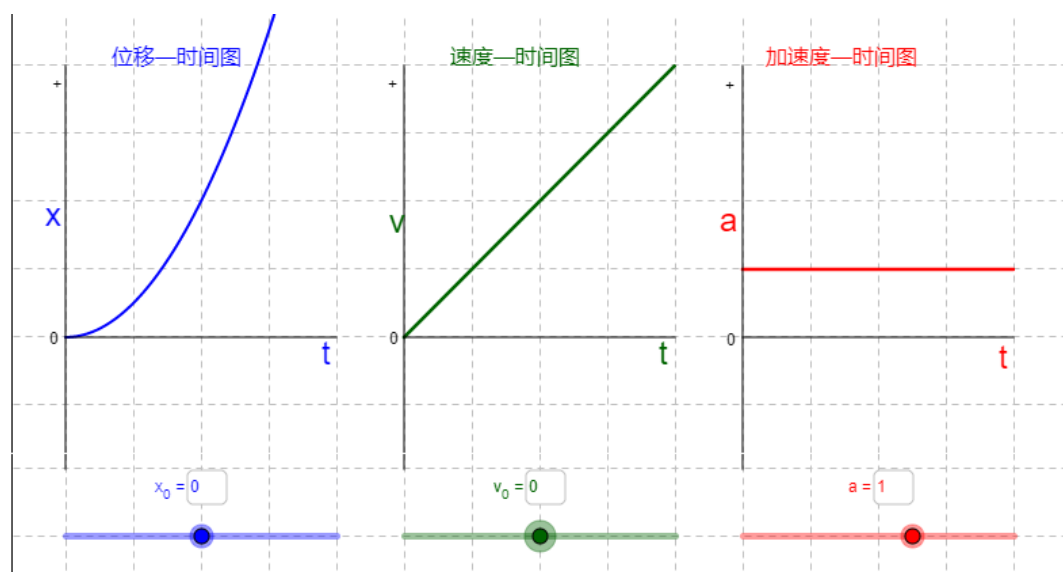


图 1: 匀加速直线运动（见“[互动演示](#)”页面），加速度曲线下方从 0 到 t 的面积是速度，速度曲线下方从 0 到 t 的面积是位移

简谐振子

为了方便下文举例，我们先来介绍力学中的一个经典模型即简谐振子。假设无摩擦的光滑水平直轨道上有一根质量不计的弹簧一端固定不动，而另一端上固定了一个质点。如果给这个质点一个初速度或初位移，那么它将会沿着轨道往复运动，我们把这种运动叫做简谐运动。顺带一提，我们以后会看到位置关于时间的函数恰好是 $\cos(\omega t)$ ， ω 是角频率，代表振动的快慢。

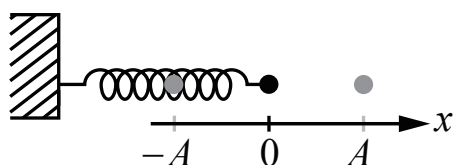


图 2: 简谐振子

更困难的问题

事实上我们很少会遇到“已知每个质点的 $F(t)$ ”这么简单的条件。即使在简谐振子这样简单的模型中，我们也不可能事先就知道质点受力关于时间的变化情况。因为受力分析得到的是力关于位置的变化 ($F(x) = -kx$, k 是劲度系数)，而粒子的位置变化 (函数 $x(t)$) 又取决于受力。这样一来，我们就没有办法像上面一样直接用定积分来解决这个问题了。

为了解决这样的问题，我们需要使用微分方程。但现在我们可以用以下的简单思路进行一个近似的数值计算：例如在简谐振子的模型中，假设质点初始时刻处于弹簧的平衡位置 $x = 0$ (受力为零) 并具有一个初速度 v_0 ，在很小一段时间 Δt 内，由于 x 仍然很小，我们可以继续认为质点不受力，做匀速运动。这样当它移动到 $x = v\Delta t$ 时，我们重新计算它的受力得到 $F = -kx = -kv\Delta t$ ，然后假设在下一段很短的时间 Δt 内仍然假设质点受力不变，计算出位置和速度的变化。如此循环，就可以数值计算出 $x(t)$ 的一系列散点，连起来就得到了位移—时间曲线。当 Δt 取得越小，这种近似就越精确。

材料力学

(未完成) 研究可以发生形变的固体，在建筑和制造业有广泛应用。

流体力学

气体液体同样可以用理想化的力学模型来描述，我们把它叫做**流体**，流体力学是力学中十分重要的分支，轮船，高铁，飞机和火箭的设计都要使用它。

经典力学只能精确描述固体和液体的一些宏观力学性质，而另一些性质，例如导电性（包括超导），颜色，是否透明等，需要涉及到原子分子的性质，以及他们的相互作用。物理学的一大分支——凝聚态主要就是在研究固体和液体。

力的分类

牛顿三定律只给出了运动和力的关系以及作用力和反作用力，却没有限定这些力是什么力以及如何具体计算。现代物理告诉我们，宇宙中所有已知的力（也叫相互作用）都可以归为四种，分别是**万有引力（gravitational force）**，**电磁力（electromagnetic force）**，**弱相互作用（weak interaction）**，和**强相互作用（strong interaction）**。后两种是短程力，通常只存在于原子核内部，不适用于经典力学，先不讨论。

你可能会问，我们高中学了那么多摩擦力，支持力，弹力，浮力，为什么都没有出现呢？事实上这些力都只是微观电磁力的宏观表现，都可以归类到电磁力中。我们知道日常生活中的物质是由原子构成的，原子由原子核与电子构成，前者带正电，后者带负电，整体呈电中性。除了核反应以外，任何原子之间的作用都可以看成是由许多电子和原子核构成的系统内部的电磁作用力。由于经典力学是宏观的理论，所以我们不能用经典力学直接计算原子内部的电磁作用带来的运动规律，但可以计算摩擦力，支持力等宏观的力带来的宏观运动。

在经典力学中万有引力是一个十分重要的研究对象，我们将在万有引力和天体运动中（未完成）详细讨论。

分析力学

分析力学的数学形式比牛顿定律复杂，但和牛顿力学是等效的，即任何分析力学计算的问题用牛顿定律同样能计算并得到完全相同的结果，反之亦然。分析力学常见的形式有两种，一种是拉格朗日力学，使用拉格朗日方程，另一种叫哈密顿力学，使用哈密顿方程。量子力学就是在哈密顿力学的基础上建立

起来的，其重要性可见一斑。

相比与牛顿力学，分析力学的优势主要有两点。一是当计算的系统越来越复杂的时候（例如蒸汽机等复杂的机械结构）分析力学一般能更快捷地列出微分方程组，而牛顿力学所需要的受力分析会变得非常复杂。另一方面，分析力学能使我们站在更高的高度看问题（例如可以分析出系统中的守恒量）。

为什么复杂的数学形式反而在一些情况下使列方程变得简单呢？如果把牛顿定律比作电脑，那么分析力学就相当于一个更智能的电脑，对于系统中的某些物体，无需告诉电脑它的受力，只需告诉电脑它物体之间的运动的约束即可。约束简单来说就是怎样的运动是不可能的：例如单摆中的质点就“不可能”沿着绳的方向运动，两个咬合的齿轮“不可能”一个转动一个不转。用约束条件代替受力分析，在适当的时候可以大大提高列方程的效率。

例如在以下活塞结构中，活塞，连杆，飞轮被约束起来，活塞的运动状态（位置和速度）决定了整个系统的运动状态（未完成）

狭义相对论

（未完成）同样讨论质点组成的系统受力后的运动情况。牛顿三定律只适用于宏观低速弱引力场条件，如果粒子的速度相对光速不可忽略，那就需要使用“更精确”的牛顿第二定律，且惯性参考系切换也变得更复杂（洛伦兹变换）。当速度越低，狭义相对的计算结果越接近牛顿力学。相对论同样并不适用微观。

广义相对论

（未完成）加上强引力场和非惯性系。

混沌

（未完成）二体运动是令人愉悦的简单曲线（可参考词条“二体运动”），但三体问题不是。事实上，三体问题除去一些简单近似周期解（可参考“限制性三体问题”），之外没有解析解。

还有更复杂的问题，例如：**湍流**。

第二章

电动力学

电动力学

预备知识 经典力学^[4]

本科阶段通常会有几门不同深度关于电磁场的课程，第一门往往叫做**电磁学 (electromagnetism)**，进阶的课程叫做**电动力学 (electrodynamics)**¹。从课程内容上来说，电磁学就是简单的电动力学。严格来说，电动力学强调场和电荷的运动规律，如果研究静止的电荷和电磁场，可以将其称为**静电学 (electrostatics)** 或**静磁学 (magnetostatics)**。我们以下统一使用电动力学。

经典力学研究若干粒子（质点）受若干力后的运动情况，这里的粒子可以是任何有质量的粒子，力也可以是任何力。电动力学研究的是一堆带电荷的质点（既有质量又有电荷）受一堆电磁力后的运动情况。所以唯一需要做的是，弄清如何计算这些电磁力，再用经典力学就可以得出粒子的运动。

电磁力和电磁场

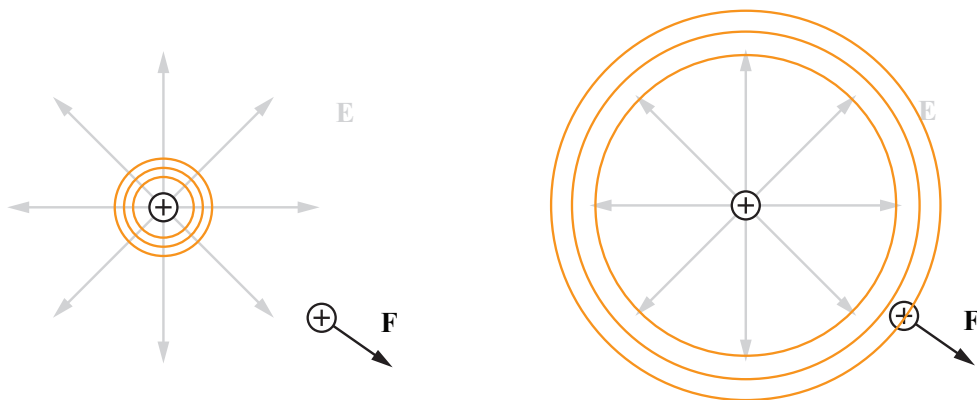


图 1: 静止的电荷突然振动几下又停下来，扰动就会以电磁波（橙色部分）的形式向外传播，到达另一电荷的位置时，才会有力的变化。图中只画出了一个电荷产生的场。

¹电动力学字面上就是“电的动力学”而不是“电动的力学”，动力学英文就是 dynamics，又例如热力学的英文是 thermodynamics.

经典力学中万有引力是超距的，就是说只要两个质点存在，不管他们相隔多远都会立即有作用力（与质量和距离有关），如果它们之间的距离发生改变，那么这个作用力也会立即改变。这是不合理的（现在我们知道任何信息的传递都不可能超过光速，如果一个粒子动一下，另一个粒子马上就能感到力的变化，那就可以超过光速传递信息）。电动力学不同，我们需要先计算电场和磁场（场就像波一样，传播需要时间），再根据粒子所在位置的场计算粒子的受力（其他地方的场如何与粒子受力无关）。例如库仑定理的形式虽然和万有引力一样，但是在电动力学中我们先计算一个粒子在另一个粒子处产生的电场，再计算处于该电场中的粒子所受电场力（库仑力）。当两个粒子都静止时，这么做似乎和直接由距离计算力有没有区别，但如果某时刻其中一个粒子抖动了一下，电场（先不提磁场）就会像扰动的水波一样将这个扰动沿各个方向以一定的速度传播，直到传播到另一个粒子所在的地方，另一个粒子才能从电场中感觉到受力的变化。

磁场虽然产生的方式和对粒子的作用与电场不同，但也会像波一样传播。事实上，电场和磁场并不是独立传播的，上面说的电场扰动的传播时必须同时借助磁场。

电荷

电荷在电动力学中扮演了两个角色。一是电磁场是由电荷产生的。二是只有带电荷的粒子在电磁场中才会受力，其他粒子不会。

麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程组是一组写描述场变化规律的数学公式。可以想象成一个懂电动力学的计算机，只要告诉它所有的带电粒子在哪里，以及如何运动（位置关于时间的函数），它就能计算出空间中任何一点的电磁场。和机械波（如水波）不同，电场和磁场在每个位置都既有方向也有大小（有方向和大小的量叫做矢量，这种场叫做矢量场）。

麦克斯韦方程组是电动力学的公设之一。

电磁力

任何一个带电粒子某时刻受到的电磁力（也叫广义洛伦兹力），都可以由它所在的位置处的电磁场（两个矢量）以及它当时运动速度（也是矢量）通过公式计算出来。这是电动力学的另一个公设。

可见，在经典力学的基础上加上麦克斯韦方程和广义洛伦兹力的公式后，如果我们知道一堆带电粒子在某个时刻的运动状态（位置和速度），我们就可以知道接下来每个粒子如何运动。

右手定则

预备知识 几何矢量^[133]

物理中常用右手定则来判断方向，右手定则分为以下两种。

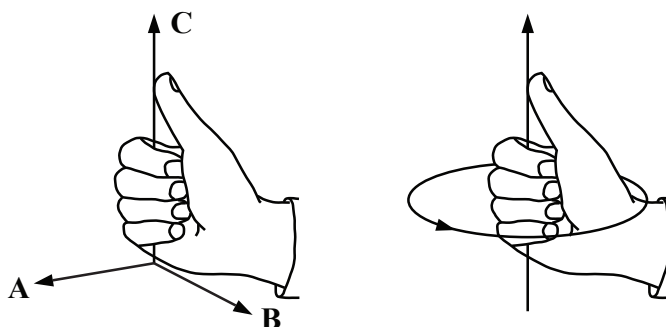


图 1: 两种右手定则

第一种右手定则

假设有两个不共线的矢量，第一个为 \mathbf{A} ，第二个为 \mathbf{B} ，它们可以定义一个平面。现在我们想根据 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 确定该平面的法向量 \mathbf{C} ，但由于平面的法向量有两个，我们如何区分它们呢？我们可以通过图 1（左）所示的右手定则来确定其中一个法向量：首先将右手的四指指向 \mathbf{A} ，再将四指弯向 \mathbf{B} ，这时伸出拇指，拇指的方向即为右手定则定义的方向。

我们通常使用的空间直角坐标系被称为**右手系**，是因为我们可以通过右手定则从 x 轴和 y 轴的方向定义 z 轴的方向（图 2 右）。同理，我们也可以定义所谓的**左手系**。

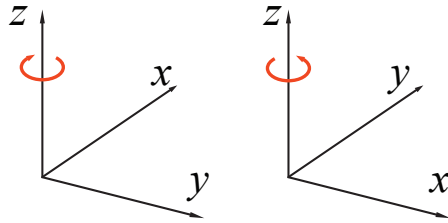


图 2: 左手系（左）与右手系（右）

第二种右手定则

假设空间中有一圆环，且圆环上有一正方向，我们可以用右手定则指定圆环所在平面的一个法向量。如图 1（右），用右手握住该圆环，手指与圆环平行，且指尖指向圆环的正方向，伸出拇指，则拇指所指的方向就是右手定则判断的方向。

第二部分

微积分

第一章

基础

集合

预备知识 公理系统^[?]

集合

对于物理学习而言，集合论没必要从公理角度来严格理解，所以在此不会给出用于划定集合讨论范围的公理系统，而是**朴素集合论 (naive set theory)**的解释，即比较接近自然语言的表达方式。

集合 (set) 是由**元素 (element)** 组成的。任何事物和概念都可以成为元素，任何不同的元素都可以放在一起，构成一个集合。可以说，如果我们划定一个讨论的范围，那么这个范围就是一个集合，范围涉及到的事物和概念就是这个集合当中的元素。公理系统的作用，也就是在所有可能讨论的话题所构成的集合中，限定一个子集作为讨论范围。对于集合 A ，定义 $|A|$ 为 A 中元素的数量，称为集合 A 的**基数 (cardinal number)** 或**势 (cardinality)**。

表达一个集合的方式有多种。最简单的方式是列出所有集合中的元素，在数学中规定的语法规则是用大括号 “ $\{$ ” 来列举集合中的一切元素，以逗号隔开彼此。比如， $\{\text{猪}, \text{牛}, \text{狗}, \text{羊}, \text{猫}\}$ 是了一个具有五个元素的集合， $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ 则是全体正整数的集合。第二个例子并没有显然地列举出所有正整数，只是用省略号表达了这个意思；也就是说，表达一个集合的方式并没有死板的规定，只要能让读者理解就可以了。

另一种常见的表达集合的方式是确定一个规则，语法规则是 “ $\{x|x \text{ 需要满足的条件}\}$ ”。比如全体正整数的集合，也可以写为 $\{x|x \text{ 是一个正整数}\}$ 。如果有多个条件，也可以列在一起，比如全体正整数的集合： $\{x|x \text{ 是一个正数，且 } x \text{ 是一个整数}\}$ 。特别地，如果某条规则是 “ x 属于某集合”，我们通常会将这个条件写到单竖线的前面，如全体正整数的集合： $\{x \in \mathbb{Z}|x \text{ 是一个正数}\}$ 。这里， \in 是一个简写的符号， $A \in B$ 等于说 “ A 是 B 的元素”。

有一个特殊的集合，它不含有任何元素，被称为**空集 (empty set)**，记作 \emptyset ，有时也写作 ϕ 。 \emptyset 是一切集合的子集。

元素和子集

若 a 是集合 A 的元素，我们就说 a 属于 (in) A ，记为 $a \in A$ 或者 $A \ni a$ 。

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，那么称 A 是 B 的子集 (subset)，本书中记为 $A \subset B$ 或者 $A \subseteq B$ ，也可以反过来写为 $B \supset A$ 和 $B \supseteq A$ 。一切集合都是自身的子集。如果 A 是 B 的子集但又和 B 不同，也就是说 A 没有包含 B 的所有元素，那么称 A 是 B 的真子集 (proper subset)，本书中记为 $A \subsetneq B$ ， $A \subsetneq B$ ， $B \supsetneq A$ 或 $B \supsetneq A$ ¹。 B 的真子集一定是 B 的子集，但是 B 本身是 B 的子集而非真子集。

注意区分这两个情况，前一个情况中 A 是 B 的元素，后一个情况中 A 是 B 的子集。另外，集合本身也可以是别的集合的元素，元素的概念没有限定，任何事物和概念都可以成为元素，包括集合。不过，集合的集合我们一般用集族 (family of sets) 或者简单地用族 (family) 来称呼。

集合运算

集合间可以互相操作，生成新的集合，这种操作被称为集合间的运算 (operation)。

\cap 表示两个集合的交，意思是将两个集合中共有的元素提取出来，组成一个新的集合。比如说， \mathbb{N}^+ 表示全体自然数的集合， \mathbb{R}^+ 表示全体正实数的集合， \mathbb{Z} 表示全体整数的集合，那么显然我们可以有 $\mathbb{N}^+ = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z}$ 。多个集合 A_i 的交集，可以写为 $A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots$ ，也可以用一个大号的交集符号简记为 $\bigcap A_i$ ，表示“所有形式为 A_i 的集合的交集”。

类似地，将两个集合中都有的元素提取出来，组成一个新的集合的操作，被称为集合的并，用符号 \cup 和 \bigcup 表示。注意，如果两个元素中有相同元素，那么在并集中这个元素只出现一次。这是因为我们关心的是每个元素是否出现在集合中，计算集合元素数量时也不会重复计算同一个元素。这是一个并集的例子：

$$\{\text{猪, 牛, 狗, 羊, 猫}\} \cup \mathbb{N}^+ = \{\text{猪, 狗, 猫, 牛, 羊, 1, 2, 3, 4, \dots}\} \quad (1)$$

注意，列举时元素的顺序也不影响集合的本质。

¹有的地方会用 \subset 来表示“真子集”，和我们这里的定义矛盾；本书中 \subset 就表示子集，但是尽量避免使用这个符号，以尽力避免读者的混淆。

对于集合 A 和 B , $A \setminus B$ 或者 $A - B$ 表示他们的**差集**. 差集所包含的元素是 A 中全体元素中减去 B 中元素, 如果 B 还含有 A 中所没有的元素, 那么这部分元素可以忽略掉. 例如, 如果令 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 那么 $A - B = \{0, 1\}$.

如果我们划定了一个讨论范围, 被讨论的元素构成的集合称为 U , 那么 U 中的任意一个子集 A 都可以进行**取补集**运算, 得到 $A^C = U - A$, 称为 A 的**补集 (complement)**.

笛卡尔积

对于集合 A 和 B , $A \times B$ 表示集合间的**笛卡尔积 (Cartesian product)**, 得到一个新的集合. $A \times B$ 中的元素表示为 (a, b) , 其中 $a \in A, b \in B$. 用集合论的术语表达就是

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\} \quad (2)$$

例如, 如果令 $A = \{0, 1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}$, 那么

$$A \times B = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\} \quad (3)$$

可以看到, 集合 A 有 4 个元素, 集合 B 有 3 个元素, 而集合 $A \times B$ 有 $3 \times 4 = 12$ 个元素.

集合运算的规律

de Morgan 公式 (de Morgan's laws): $(\bigcup A_i)^C = \bigcap A_i^C, (\bigcap A_i)^C = \bigcup A_i^C$. 用自然语言表达, 就是: 交集的补等于补集的并, 并集的补等于补集的交.

分配律 (distribution laws): $A \cup (\bigcap B_i) = \bigcap (A \cup B_i), A \cap (\bigcup B_i) = \bigcup (A \cap B_i)$. 用自然语言表达, 就是: 并集运算对交集运算满足分配律, 交集运算也对并集运算满足分配律, 就像小学所学的乘法对加法满足分配律一样.

拓展

目前为止我们只介绍了集合之间的运算以及集合中元素的数目, 但没有对集合本身建立一个结构. 从基数的角度来看, 只要两个集合之间存在一一对应, 那么就可以把它们看作同一个集合, 因为在我们的讨论范围里它们都是完

全一致的（只讨论了基数）。但是这样很无聊，没有太多研究的意义，因此数学家们开始给集合赋予各种各样的结构，进一步细分集合的分类，由此诞生了拓扑学、代数学等分支。现代数学的绝大部分分支都是通过给集合赋予结构来描述的，可以说集合论是现代数学的基石，几乎每一条数学定理都是集合论的定理。

整数

预备知识 逻辑量词，二元关系^[??]

整数的概念是大家所熟悉的。严格的数学中对于整数的定义过于抽象，主要是为了逻辑基础的严谨性；严格定义依然是建立在我们熟知的整数概念上的，所以在物理学习中没必要深入到整数的定义上，读者只需要按照通常的理解方式来认识整数就可以。我们把整数构成的集合称为**整数集 (Set of Integers)**，记为 \mathbb{Z} 。

整数通常涉及的运算有加法和乘法。加法的逆运算被称为减法，且减法在整数集上是封闭的，即两个整数相减仍为整数；乘法的逆运算被称为除法，除法在整数集上就不封闭，例如 $2/3 \notin \mathbb{Z}$ ，尽管 2 和 3 都属于 \mathbb{Z} 。

在中小学中我们学过带余除法，用现代数学语言可以记成如下形式：当被除数为 a ，除数为 b ，余数为 c 的时候，存在一个整数 k ，使得 $a = kb + c$ 。作为练习，用逻辑量词来表达时，这句话可以写为：当被除数为 a ，除数为 b ，余数为 c 的时候， $\exists k \in \mathbb{Z}, \text{s.t. } a = kb + c$ 。在群论 (**group theory**)^[??]、环论 (**ring theory**) 和域论 (**field theory**) 中，我们会遇到大量基于模运算概念的运算。本词条中，我们会使用钟表模型来阐释如何进行模运算。

将除数固定为 b ，那么如果两个整数 a_1 和 a_2 除以 b 所得到的余数相同，我们就称 a_1 和 a_2 **模 b 同余** ($a_1 \equiv a_2 \pmod{b}$)。这里模的意思类似于“除以”，同余的意思是“余数相同”。在这种情况下，我们也把 a_1 和 a_2 称为彼此的**模 b 的同余数 (congruence mod b)**。为了简化表达，当默认了 b 的取值以后，我们也可以把 \pmod{b} 省略，简单地称 a_1 和 a_2 **同余 (congruent)**，并记为 $a_1 \equiv a_2$ 。

由词条二元关系^[??]中对等价关系的讨论可以推知，给定整数 b 以后，模 b 同余的关系是一个整数集上的等价关系。也就是说，我们可以利用 b 把整数集

划分为若干个等价类，称作**整数集模 b 的同余类 (congruence class)**。由等式 $a = kb + c$ 可知， a 就在模 b 余 c 的同余类中。在词条**二元关系**^[29]中所讨论的“两数的差是 3 的倍数”这一关系，其实就是一个模 3 同余的关系。

钟表和模算数

钟表的模型可以帮助你直观地理解模运算，以及初步感受“集合间的运算”是什么样的。

我们所熟知的加法、减法和乘法运算是在一个无穷集合上讨论的，即整数集。如果把“等于”的概念替换为“模同余”的概念，我们就可以在有限集合上进行加法、减法和乘法运算。最常见的例子，是钟表上整点的计算，这是一个模 12 同余的运算。

模运算的概念是，给定用来作除数的 b 以后，将模 b 同余的整数都看成同一个。在钟表的例子里， $b = 12$ ，那么我们把 0, 12, 24, 36 等都看成同一个元素，3, 15, 27, 39 等也都看成同一个元素。判断整数 a_1 和 a_2 是否模 12 同余的方法很简单，就是看 $a_1 - a_2$ 是否是 12 的倍数。这样，我们可以把**整数轴卷起来**，让所有彼此同余的整数都重合起来，此时 12 点就是 0 点，14 点就是 2 点，28 点就是 4 点。为了方便讨论，我们只取 0, 1, 2, \dots , 11 分别作为 12 个同余类的代表，然后进行运算。

我们要讨论的是，从两个同余类中随便取一个数字，将它们进行加法，减法或者乘法运算后，结果落入哪一个同余类。在这样的运算规则下，用上一段所规定的代表元来进行讨论的话，我们可以得到以下运算的例子：

$$\begin{aligned} 1 + 1 &\equiv 2 & 4 + 8 &\equiv 0 & 11 + 8 &\equiv 7 \\ 3 - 2 &\equiv 1 & 5 - 7 &\equiv 10 & & \\ 2 \times 3 &\equiv 6 & 3 \times 4 &\equiv 0 & 4 \times 7 &\equiv 4 \end{aligned} \tag{1}$$

模运算有一个美妙的性质。如果 a_1 和 a_2 同余，那么我们可以将它们的关系表达为 $a_1 = a_2 + 12k$ ，其中 k 是唯一存在的整数。利用这个关系容易证明，对于任意的整数 a_3 ，我们都有 $a_1 + a_3 \equiv a_2 + a_3$ ， $a_1 - a_3 \equiv a_2 - a_3$ 以及 $a_1 \times a_3 \equiv a_2 \times a_3$ 。这三个式子实际上说明了，在进行同余类的加法、减法和乘法的时候，无论取谁作为代表元素，结果都还是在同一个同余类里。因此我们才可以放心地把同余类的运算看作是任意代表元之间的运算，比如钟表整点的计算。

在通常的钟表中，我们把整数轴卷成周长为 12 的钟表。我们也可以把整数轴按其它周长来卷曲。当把整数轴卷曲成周长为 b 的钟表时，在钟表上进行的加减和乘法运算就是数学家们所讨论的模 b 的加减和乘法运算。

素数

根据小学所学定义，**素数 (prime numbers)** 是指那些除了 1 和自身以外没有别的因子的整数。

在代数学中，整数集是**交换环 (commutative ring)** 的一个特例，而素数是更广义的**交换环的素元素 (prime element of a commutative ring)** 的一个特例。根据交换环中素元素的定义，整数中的素数 p 是满足如下需求的整数：如果 p 能整除 ab ，其中 a 和 b 是任意满足条件的整数组合，那么 p 必能整除 a 和 b 中的一个。用逻辑量词来简洁地表达，就是： $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ ，如果 $p|ab$ ，那么要么 $p|a$ ，要么 $p|b$ 。

映射

预备知识 集合^[17]

给定集合 A 和 B ，我们可以从 A 中每一个元素上拉一根线连接到 B 中的某一个元素，这些线的分布形式就被称为一个从 A 到 B 的**映射 (mapping)**，也叫**算符 (operator)**。将这个映射记为 f ， A 叫做 f 的**定义域 (domain)**， B 叫做**到达域 (codomain)**²， B 中被线连接到的元素的集合叫做 f 的**值域 (range)**³或**像 (image)**。我们一般将“ f 是从 A 到 B 的映射”记为

$$f: A \rightarrow B \quad (1)$$

也就是说从 A 的元素上拉线到 B 的元素上。有时候，为了表示映射的定义域 A 是另一个集合的 S 的子集，我们也会将映射记为

$$f: A \subseteq S \rightarrow B \quad (2)$$

²也叫陪域、上域、目标集 (target set)

³值域在一些文献中指的是到达域。

注意映射是有方向区分的，比如在上面的例子中， A 中每个元素都有且只有一根线拉出去，但是 B 中的元素可以同时被一根或多根线连接的，也可以没有连接（即不在值域中）。

映射的类型

定义 1

如果映射 $f: A \rightarrow B$ 中每个 B 中元素只被 1 根或者 0 根线连接，那么称 f 是一个单射 (**injection**)。如果 $f: A \rightarrow B$ 中每个 B 中元素都被至少 1 根线连接，那么称 f 是一个满射 (**surjection**)。如果 f 既是单射又是满射，那么称它为一个双射 (**bijection**)，或者叫一一对应 (**one-to-one correspondence**)。

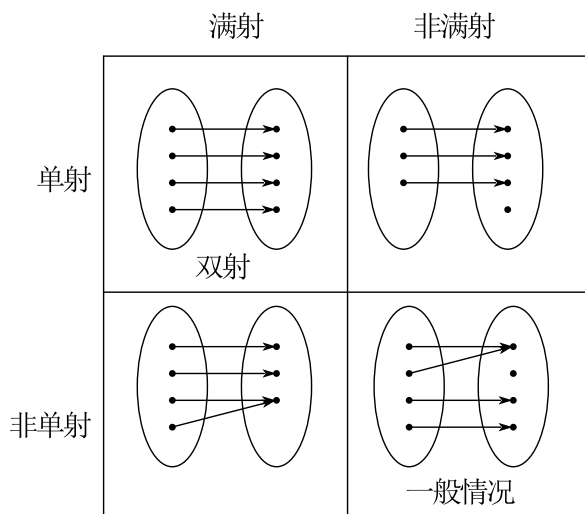


图 1: 映射的分类

如果 $f: A \rightarrow B$ 是一个双射，那么 A 中每一个元素都唯一地连接到 B 中某一个元素，并且 B 中每一个元素也都唯一被 A 中某一个元素所连接，因此很明显可以将这个过程反过来，从 B 中向 A 中拉连接线。另外，如果 A 和 B 存在双射，意味着 A 和 B 的元素数量应该一致⁴。

函数是一种常见的映射，例如 $f(x) = 2x$ 可以看作映射 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 。但是映射可以从任意集合到任意集合。例如将整数映射到正多边形，将函数的映射

⁴本书中统一使用这种定义。一些其他教材中也把我们的“单射”称为“一一映射”，把“满射”称为“到上”，把“双射”称为“一一到上”，需要特别小心。

到函数或实数（一般把这种映射称为**算符**）等。

注意当一个集合中有无限个元素时，我们有可能在它的子集和它本身之间建立一一映射，例如函数 $\tan(x)$ 可以从实轴的开区间 $(-\pi/2, \pi/2)$ 一一映射到整个实轴 \mathbb{R} ，又例如我们可以将全体整数 \mathbb{Z} 乘以二后一一映射到全体偶数 $2\mathbb{Z}$ 上。这时我们仍然认为这两个集合的元素一样多，虽然直觉上可能不容易接受。

Cantor-Bernstein 定理显示，如果集合 A 到集合 B 上存在一个单射 f 和一个满射 g ，那么总可以利用 f 和 g 来构造出一个双射。

多元运算

有时候我们需要将两个集合 A, B 中任意各取一个元素，然后映射另一个集合 C 中的元素，称为**二元运算 (binary operation)**。我们可以使用笛卡尔积（式 2^[17]）将这个映射表示为

$$A \times B \rightarrow C \quad (3)$$

一个简单的例子就是两个实数的加法减法或乘法可以表示为 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ （或简记为 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ），但除法不可以，因为除数的集合不是 \mathbb{R} 而是 \mathbb{R} 去掉 0。

同理，**多元运算**可以用多个卡氏积表示为

$$A_1 \times \cdots \times A_N \rightarrow C \quad (4)$$

例如含有 N 个自变量的函数就是一个 N 元运算。特殊地， N 个相同集合 A 做卡氏积可以简单表示为 A^N ，例如 N 个有序复数的集合为 \mathbb{C}^N 。

相等和拓展

当映射（算符） $f: A \rightarrow B$ 和 $g: C \rightarrow D$ 的定义域相等（ $A = C$ ）且对任意 $x \in A$ 都有 $fx = gx$ ，那么我们就说两个映射（算符）**相等**，记为 $f = g$ ，否则它们就不相等。

若 A 是 C 的子集（ $A \subseteq C$ ），我们就说 g 是 f 的**拓展 (extension)**，记为 $f \subseteq g$ 。特殊地，当 A 是 C 的真子集（ $A \subset C$ ），就记为 $f \subset g$ 。

复合映射

给定两个映射 $f: A \rightarrow B$ 和 $g: C \rightarrow D$ ，如果 f 的值域 R 是 g 的定义域 C 的一个子集，则可以定义**符合映射** $g \circ f: A \rightarrow D$ ，即先将 A 中的元素通过

f 映射到 $R \subseteq C$, 再通过 g 映射到 D 的元素. 在没有歧义的情况下也可以将 \circ 省略, 尤其是将映射称为**算符**时.

复合映射常见的例子是复合函数, 令 \mathbb{R} 上的函数 $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$, 则复合函数 $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ 为 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin^2 x$.

根据定义, 复合映射满足分配律, 令 f, g, h 为映射, 则

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad (5)$$

恒等映射

若一个集合到它子集的映射 $f: X \rightarrow X$ 把任意 $x \in X$ 映射到 x 本身, 我们就叫它**恒等映射 (identity map)** 或者**单位算符 (unit operator)**, 通常用 I 或 E 表示. 注意对不同集合 X , 它们的单位算符定义域并不相等, 所以它们的单位算符也不相等.

逆映射

给定集合 A, B , 定义 B^A 为“从 A 到 B 的所有可能的映射所构成的集合”. 如果 B 是一个二元集合, 即它只有两个元素, 不妨记为 $B = \{0, 1\}$, 那么 B^A 可以用来表示 A 的**幂集**, 即由 A 的所有子集所构成的集合. 这是因为对于任意的 $f \in B^A$, 我们可以把这个 f 对应到 A 的子集 S , 其中 S 的元素全都被 f 映射到 1 上, $A - S$ 的元素全都被 f 映射到 0 上. 当然, 0 和 1 的地位反过来也可以. 由于这个特点, 我们简单地把 A 的幂集记为 2^A ⁵.

对于映射 $f: A \rightarrow B$, 可以定义其逆映射 $f^{-1}: 2^B \rightarrow 2^A$. 对于 B 的任意子集 C , 有:

$$f^{-1}(C) = \{x | x \in A, f(x) \in C\} \quad (6)$$

此时, $f^{-1}(C)$ 称为 C 在 f 下的**逆像 (inverse image)** 或**原像 (preimage)**.

特别地, 和 f 的值域中不相交的 C 被 f^{-1} 映射到空集上, 而空集也是 A 的一个子集. 如果 f 是一个双射, 那么对于任意 $y \in B$, 单元素子集 $\{y\}$ 都被 f^{-1} 映射在 A 的某个单元素子集上, 那么我们也可以认为此时 f^{-1} 实际上是单个元素映射在单个元素上, 也就是从 B 到 A 的映射.

⁵当 A, B 都是有限集的时候, $|B^A| = |B|^{|A|}$. 特别地, $|2^A| = 2^{|A|}$.

对于任意单射 $f: A \rightarrow B$, 令其值域为 $R \subseteq B$, 那么 $f: A \rightarrow R$ 就是一一映射, 所以我们总可以唯一地定义其逆映射 $f^{-1}: R \subseteq B \rightarrow A$.

对于双射 $f: A \rightarrow B$, 显然 $f \circ f^{-1}$ 和 $f^{-1} \circ f$ 都是单位算符 (恒等映射). 注意两者的定义域分别为 A 和 B , 当 $A \neq B$ 时不能写成 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$. 如果把 A, B 到自身的恒等映射分别记为 I_A 和 I_B , 那么 $f \circ f^{-1} = I_B, f^{-1} \circ f = I_A$.

例 1

如果取正弦函数 $y = \sin x$ 的值域为 $R = [-1, 1]$ 如果取定义域为 \mathbb{R} , 那么它不是一个单射, 因为每一个 $y \in R$ 都对应无穷个 x , 所以不存在反函数. 但如果取定义域为 $[-\pi/2, \pi/2]$, 那么它是一个单射, 存在反三角函数 $\sin^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$.

根据以上定义, $\sin^{-1}(\sin(x))$ 是定义在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上的恒等函数, 而 $\sin(\sin^{-1}(x))$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的恒等函数, 所以有 $\sin \circ \sin^{-1} \subseteq \sin^{-1} \circ \sin$.

函数

预备知识 映射^[22]

- 本词条存在未完成的内容.

广义来说, 任何映射都可以叫做**函数 (function)**. 所以我们也可以用映射的记号表示函数. 例如 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 表示定义域为实数集, 值为实数的函数, 通常记为 $f(x)$. 又例如 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ 表示实变量和复值的二元函数 $f(x_1, x_2)$. 注意其中 \mathbb{R}^2 表示笛卡尔积 (式 2^[17]) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

复合函数

未完成: 复合函数即复合映射

函数的性质

以后我们会看到一些用极限^[69] 和导数^[78] 描述的性质. 例如连续性^[76], 一致连续, 可导.

阶乘

• 本词条处于草稿阶段.

对正整数 $n > 0$ ，阶乘 (**factorial**) 定义为小于等于 n 且大于零的所有整数相乘

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)(n-1)n = \prod_{k=1}^n k \quad (1)$$

其中 \prod 符号的用法与求和符号 \sum 相似，只是把加法变为乘法。

特殊地，我们定义

$$0! = 1 \quad (2)$$

阶乘可以拓展到非整数，见“Gamma 函数^[?]”。

二项式定理

预备知识 组合^[?]

二项式展开公式为

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \quad (n \text{ 为正整数}) \quad (1)$$

其中表示组合 (**combination**)，定义为

$$\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (2)$$

推导

若展开多项式的时候先不合并同类项（每项前面的系数都是 1）则

- $(a+b)^0 = 1$ 有 1 项
- $(a+b)^1 = a+b$ 有 2 项

- $(a + b)^2 = aa + ab + ba + bb$ 有 4 项
- $(a + b)^3 = aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb$ 有 8 项
- $(a + b)^n$ 有 2^n 项（若不合并相同项）

这就相当于用 a 和 b 填满 n 个有序的位置，每个位置都可以取 a 或 b ，共有 2^n 种排列，每种排列就是一项，所以共有 2^n 项。

下面把 2^n 项中的相同项进行合并，把其中出现了 i 个 a 及 $n - i$ 个 b 的项都记为 $a^i b^{n-i}$ ，那么共有 $\binom{n}{i}$ 个这样的项。把它们相加得 $\binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ 。所以

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \quad (3)$$

证毕。

二项式定理（非整数幂）

预备知识 二项式定理^[27]

当 a, b 为实数， u 为非零实数时，有

$$(a + b)^u = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{u(u-1)\dots(u-i+1)}{i!} a^i b^{u-i} \quad (1)$$

容易看出，当 u 为整数时， $i > u$ 的所有项为 0，得到整数指数的二项式定理^[27]。

数值验证

在学习微积分之前，这里只给出一个数值验证的方法（而不是证明）。在微积分中，这个定理可以用泰勒展开^[27]推导出来。

首先化简上式，不妨令 $|a| < |b|$ ，把 b^u 提出括号，再令 $x \equiv a/b$ ，有 $|x| < 1$ 。

$$(a + b)^u = b^u (1 + x)^u = b^u \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{u(u-1)\dots(u-i+1)}{i!} x^i \quad (2)$$

所以只要用数值验证

$$(1+x)^u = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{u(u-1)\dots(u-i+1)}{i!} x^i \quad (3)$$

即可. 接下来, 可以用计算器或程序对式 3 的前 N 项进行求和. 如果增加 N 使结果趋近精确值, 则验证成功 (见下表). 这里给出计算下表的 Matlab 程序^[?].

表 1: 数值验证二项式定理 (非整数幂)

$(1+x)^u$	$N = 5$	$N = 20$	$N = 100$	精确值前 8 位
$x = 0.5, u = -0.3$	0.88445640	0.88546751	0.88546749	0.88546749
$x = 0.6, u = 3.1$	4.2930453	4.2931093	4.2931093	4.2931093

直线和平面的交点

预备知识 高中解析立体几何, 几何矢量^[133]

若平面上任意一点为 $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$, 法向量为 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$. 直线上一点为 $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$, 方向为 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, 求射线与平面的交点. 注意 \mathbf{n} 和 \mathbf{v} 不必是单位矢量.

平面方程为

$$(\mathbf{r} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1)$$

直线的参数方程为

$$\mathbf{r} = \lambda \mathbf{v} + \mathbf{s} \quad (2)$$

式 2 代入式 1 解得

$$\lambda = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}} \quad (3)$$

再代入式 2 得交点为

$$\mathbf{r} = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{v} + \mathbf{s} \quad (4)$$

(未完成: 给出 Matlab 代码)

三角恒等式

预备知识 三角函数

这里列出几个高中常见的三角函数恒等式，推导从略。以下用到的两个高中不常见的三角函数分别为 $\csc x = 1/\sin x$, $\sec x = 1/\cos x$, 分别读作 cosecant 和 secant

勾股定理

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (1)$$

等式两边同除 $\cos^2 x$ 得

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad (2)$$

两角和公式

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (3)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (4)$$

二倍角公式

令式 3 中 $y = x$ 取上号得

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad (5)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (6)$$

降幂公式

结合式 6 和 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 可以得到

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad (7)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad (8)$$

和差化积公式

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) \quad (9)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \left(\frac{x-y}{2} \right) \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \quad (10)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) \quad (11)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right) \quad (12)$$

这里介绍一种推导方法可方便记忆. 以式 11 为例, $\cos x$, $\cos y$ 和 $\cos x + \cos y$ 分别等于图 1 中矢量 \mathbf{A} , \mathbf{B} (令它们的模长为 1) 和 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 在水平方向的投影长度, 而 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 在水平方向的投影长度等为 $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \cos[(x+y)/2]$, 其中 $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = 2 \cos[(y-x)/2]$, 代入可得式 11. 利用 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 在竖直方向的投影可得式 9, 把式 9 和式 11 中的 y 分别替换成 $-y$ 和 $y + \pi$ 可推导出式 10 和式 12.

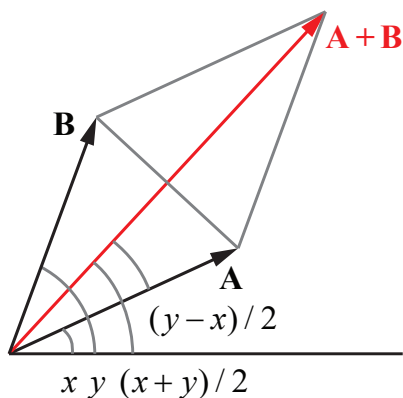


图 1: 和差化积公式推导

预备知识 指数函数

这里介绍三种双曲函数：双曲正弦函数，双曲余弦函数和双曲正切函数，他们的定义分别为

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (1)$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (2)$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (3)$$

其中 e 是一个高等数学中常见的常数，叫做自然对数底^[73]。这三个函数的图像如图 1。

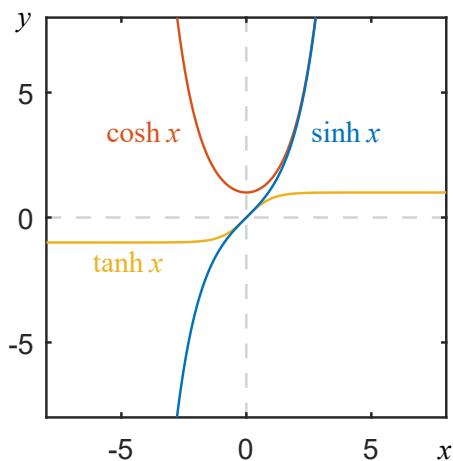


图 1: 三种双曲函数的图像

注意 $\sinh x$ 和 $\tanh x$ 是奇函数， $\cosh x$ 是偶函数。

例 1 反双曲正弦函数

要求 $\sinh x$ 的反函数，我们令

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad (4)$$

整理成关于 e^y 的二次方程，得

$$(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \quad (5)$$

解出 e^y 为

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1} \quad (6)$$

由于 $e^y > 0$, 上式取正号. 两边取自然对数, 得

$$y = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (7)$$

sinc 函数

预备知识 连续函数^[76]

sinc 函数的定义为

$$\operatorname{sinc} x = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases} \quad (1)$$

sinc 函数的图像如图 1, 可以证明, 该函数在 $x = 0$ 处是连续的, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \operatorname{sinc} 0 = 1 \quad (2)$$

归一化积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2(x) dx = \pi \quad (3)$$

充分必要条件

若由命题 A 能推导出命题 B , 则 A 是 B 的充分条件, B 是 A 的必要条件. 如何理解这个定义呢? 下面举两个例子.

例 1

命题 A : 四边形 $ABCD$ 是一个正方形.

命题 B : 四边形 $ABCD$ 的四条边相等.

首先我们考虑 A 对 B 的关系. 显然, 由 A 可以推出 B , 说明 A 中有充分的信息能得到 B , 所以叫做 B 的充分条件. A 中包括得到 B 所必要的信息,

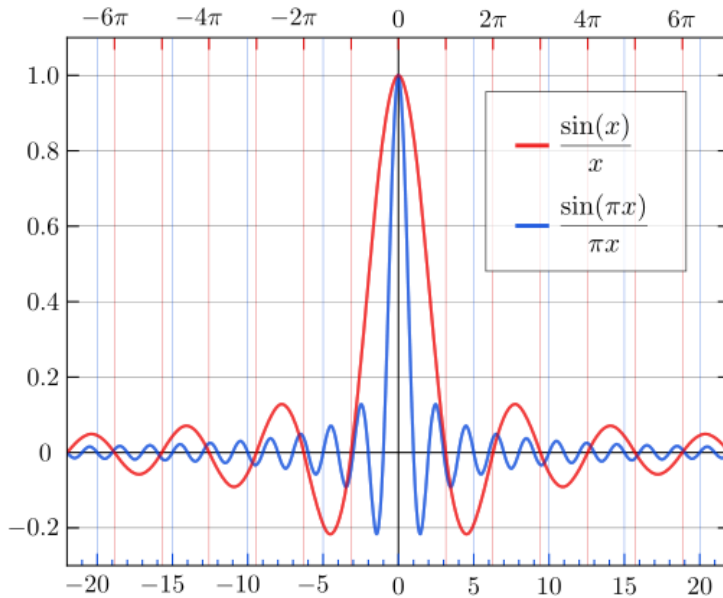


图 1: sinc 函数 (来自维基百科)

还可能包括一些其他信息，例如由命题 A 可以得出四边形任意两条临边垂直。这些多出来的信息并不一定是得到 B 所必须的，因为还有许多其他的四边形四条边相等但并不是正方形。

那如何判断 A 中有没有多余的信息呢？我们可以反过来试图用 B 推导命题 A ，若原则上得不出 A （而不是因为我们逻辑水平不够），则证明 A 中有多余的条件。这时我们说 A 不是 B 的必要条件，因为 A 中的一些信息是多余的，也就是没有必要的。综上， A 是 B 的充分非必要条件。

现在我们从 B 的角度考虑。虽然由条件 B 不能推导出条件 A ，但是 B 是 A 中信息的一部分， B 必须要成立才有可能使 A 成立，也就是说如果 B 不成立 A 就不可能成立（四条边不全相等的四边形一定不是正方形）。所以说 B 是 A 的必要条件。另外，由 B 中的少量信息不能得到 A ，所以 B 不是 A 的充分条件。综上， B 是 A 的必要非充分条件。

例 2

命题 A ：三角形 X 的其中两个内角分别为 90° 和 45° 。

命题 B ：三角形 X 有两个 45° 的内角。

利用三角形三个内角和为 180° 的事实，可以从 A 推出 B ，说明 A 是 B 的充分条件， B 是 A 的必要条件。但也可以从 B 推出 A ，说明 B 是 A 的充分条

件, A 是 B 的必要条件. 所以 A 和 B 既是彼此的充分条件也是彼此的必要条件. 所以我们说 A 和 B 互为充分必要条件. 若 A 是 B 的充分必要条件, B 一定也是 A 的充分必要条件. 因为两种表述都意味着 A, B 命题等效, 所提供的信息都是一样的, 两者都没有任何多余的或者缺失的信息.

需要注意的是

1. 充分/必要条件是二个命题之间的关系, 若直说一个命题是充分/必要条件没有意义.
2. 讨论充分/必要条件需要在一定的前提下进行. 以上两个例子中的前提如: 我们讨论的是欧几里得几何中的平面四边形和三角形. 当然, 我们也可以把这个前提直接写在每个命题中.
3. 在证明 A 是 B 的充分必要条件时, 需要分别证明 A (相对于 B) 的充分性和必要性. 充分性需要由 A 证明 B , 必要性需要由 B 证明 A .
4. 在证明 A 是 B 的充分非必要条件时, 除了需要证明 A 的充分性, 还需非必要性, 即 B 不能推出 A . 只要我们可以举出一个 B 成立 A 不成立的反例, 就立刻证明了不可能由 B 推出 A .

四象限 Arctan 函数

我们经常会遇到这样一个问题: 已知平面直角坐标系上一点 P , 坐标为 (x, y) , 求射线 OP 与 x 轴正方向的夹角 θ . 首先我们要给这个夹角取一个范围, 一般来说既可以取 $[0, 2\pi)$ 也可以取 $(-\pi, \pi]$, 但如无特殊说明, 我们统一使用后者.

一些教材中直接用 $\theta = \arctan(y/x)$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ 来表示这一关系, 这是不严谨的. 我们下面来定义一个符合要求的新函数, 记为 $\text{Arctan}(y, x)$ ⁶. 其中定义为 $x, y \in \mathbb{R}$, 即任意实数, 值域为 $(-\pi, \pi]$.

⁶在许多编程语言中 \arctan 被记为 atan , Arctan 被记为 atan2 . 也有一些文献将 Arctan 记为 Tan^{-1} 或 atan2

$$\operatorname{Arctan}(y, x) \equiv \begin{cases} \arctan(y/x) & (x > 0) \\ \arctan(y/x) + \pi & (x < 0, y \geq 0) \\ \arctan(y/x) - \pi & (x < 0, y < 0) \\ \pi/2 & (x = 0, y > 0) \\ -\pi/2 & (x = 0, y < 0) \\ 0 & (x = 0, y = 0) \end{cases} \quad (1)$$

本书统一使用该定义，但也有一些其他文献将其定义为上式加 π ，使值域为 $(0, 2\pi]$ ，或者认为 $x = 0, y = 0$ 无定义（不属于定义域）。

偏导数

函数在除了在原点和 x 轴的负半轴，在其它定义域都是连续且光滑的，即存在连续的无穷阶偏导^[22]。一阶偏导为

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Arctan}(y, x) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Arctan}(y, x) = \frac{-x}{x^2 + y^2} \quad (2)$$

极坐标系

预备知识 平面直角坐标系，位置矢量^[198]，四象限 Arctan 函数^[35]

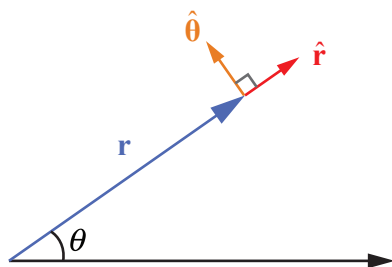


图 1: 极坐标系和两个单位矢量

在平面上取一个点作为原点，过原点作一条轴称为**极轴**，并选定极轴的正方向，规定单位长度。该平面上某点与原点连成的线段叫做**极径**，其长度一

般用 r (或 ρ) 表示. 若 r 为负值, 则表示反方向的长度. 极径与极轴的夹角叫做极角 (规定逆时针旋转极角增加, 顺时针旋转则减少), 用 θ 表示. θ 的值通常表示成弧度, 取值范围一般选 $(-\pi, \pi]$ 或 $[0, 2\pi)$. 于是任何一点都可以用两个有序实数 (r, θ) 来表示其在该平面上的位置, 这就是一个点的极坐标.

为了表示一个坐标对应的单位矢量, 我们一般把坐标变量名记为粗体并在上方加一个标记. 例如直角坐标系中, $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ (有时也记为 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) 代表 x, y, z 轴方向的单位矢量. 在极坐标中, 定义 \hat{r} 为 r 增加的方向的单位矢量, $\hat{\theta}$ 为 θ 坐标增加方向的单位矢量 (即 \hat{r} 逆时针旋转 $\pi/2$ 的方向). \hat{r} 与 $\hat{\theta}$ 互相垂直, 构成一对单位正交基底, 平面上的任意矢量都可以正交分解到这两个方向上. 我们通常把 \hat{r} 的方向叫做径向, 把 $\hat{\theta}$ 的方向叫做法向. 要注意极坐标中的两个单位矢量是 θ 的函数, 对于不同的 θ , 它们的方向也不同.

习题 1

试证明极坐标方程 $r = r_0 / \cos(\theta - \theta_0)$ 和 $r = 2R \cos(\theta - \theta_0)$ 分别表示一条直线和一个圆.

与直角坐标的转换

要在极坐标系的基础上建立一个直角坐标系, 习惯的做法是取原点相同, 且令 x 轴与极轴重合, y 轴取 $\theta = \pi/2$ 的方向. 这样将 \mathbf{r} 用 \hat{x} 和 \hat{y} 展开, 就得到

$$\mathbf{r} = r \cos \theta \hat{x} + r \sin \theta \hat{y} \quad (1)$$

即

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (2)$$

这样就从极坐标转换为直角坐标.

要从直角坐标转换为极坐标, 首先由勾股定理有 $r^2 = x^2 + y^2$. 使用反正切函数, 我们可以表示 $x > 0$ 或 $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ 时的 θ , 即 $\theta = \arctan(y/x)$. 为了表示任意情况我们可以使用 Arctan 函数式 1 [35]. 这样, 从直角坐标转到极坐标的转换就可以表示为

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{Arctan}(y, x) \end{cases} \quad (3)$$

根据 Arctan 的定义 (式 1^[35]), θ 的范围是 $(-\pi, \pi]$.

阿基米德螺线

- 本词条需要更多参考文献.
- 本词条处于草稿阶段.

预备知识 极坐标中的曲线方程^[120]

阿基米德螺线 (图 1) 的极坐标方程为

$$r = a + b\theta \quad (\theta > -a/b) \quad (1)$$

注意虽然从原点发出的任意射线都与曲线有无穷多个交点, 但一个 θ 仍然只对应一个 r , 函数仍然是单值的.

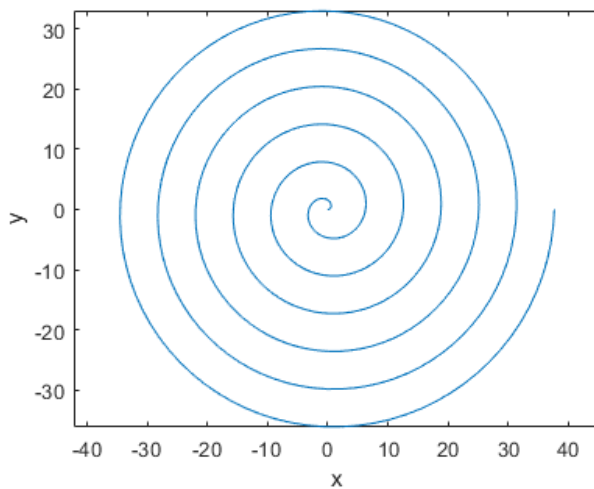


图 1: 阿基米德螺线, $r = \theta$

柱坐标系

预备知识 极坐标系^[36]

若在原有的直角坐标系上定义柱坐标系 (图 1), 可用三个变量 (r, θ, z) 描述三维空间中任意一点. 其中 r 代表该点到 z 轴的距离 ($r \geq 0$), θ 代表与 x 轴的夹角, z 与直角坐标系相同. 柱坐标系相当于在极坐标系的基础上增加了一个垂直轴.

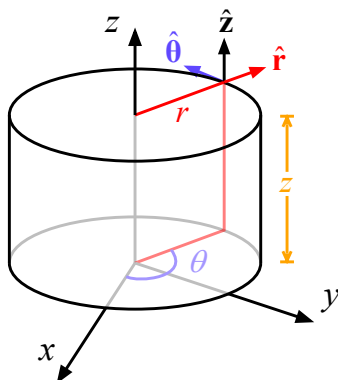


图 1: 定义柱坐标系

柱坐标系中的单位矢量如图 1 中的 $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z}$ 所示. 其中 $\hat{r}, \hat{\theta}$ 与极坐标系中的定义相同, \hat{z} 是直角坐标系 z 轴的单位矢量, 注意三个单位矢量两两垂直, 构成一组单位正交基底, 任何矢量可以在这组基底上展开. 再次强调, 与直角坐标系不同的是, $\hat{r}, \hat{\theta}$ 并不是常矢量, 而是坐标 θ 的函数.

柱坐标与直角坐标间的转换类比式 2^[36] 和式 3^[36] 即可

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{Arctan}(y, x) \\ z = z \end{cases} \quad (1)$$

球坐标系

预备知识 位矢^[198]

球坐标

三维直角坐标系中的一点 P 的位置可以用 (r, θ, ϕ) 这 3 个有序实数来表示, 称为该点的球坐标 (图 1). 其中 r 表示该点到原点的距离 ($r \geq 0$), 即位矢^[198]的模长; θ 表示该点的位矢与 z 轴的夹角 ($\theta \in [0, \pi]$), 即极角; ϕ 表示该点的位矢在 $x-y$ 平面上的投影与 x 轴的夹角 ($\phi \in [0, 2\pi]$ 或 $[-\pi, \pi]$), 即方位角. 注意有些教材中用 θ 表示方位角, ϕ 表示极角, 或者将 ϕ 记为 φ , r 记为 ρ 等, 需要通过上下文判断每个坐标符号的具体含义.

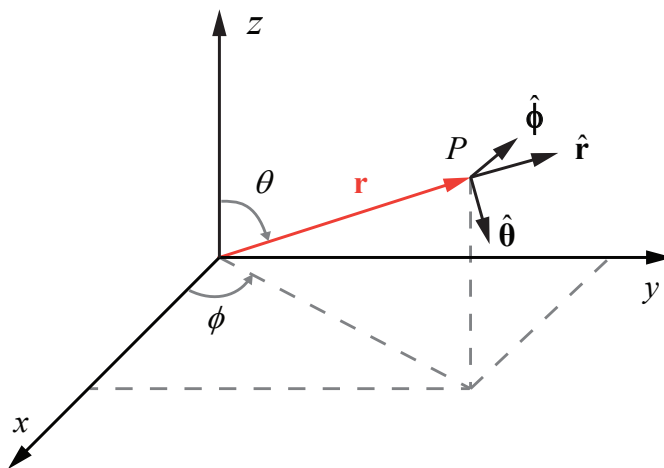


图 1: 球坐标系

球坐标系中的单位矢量

三个球坐标分别有对应的单位矢量 $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ (如图). 定义它们的方向分别指向对应坐标增加的方向, 例如 r 增加时, 点 $P(r, \theta, \phi)$ 就向 $\hat{\mathbf{r}}$ 的方向移动. 三个单位矢量两两垂直, 形成一组正交归一基底, 任意三维矢量都可以表示成它们的线性组合. 即

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} + (\mathbf{v} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}) \hat{\boldsymbol{\theta}} + (\mathbf{v} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}) \hat{\boldsymbol{\phi}} = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + v_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (1)$$

与直角坐标系不同的是, 按照定义, 球坐标的三个单位矢量是关于 θ 和 ϕ 的函数. 即 $\hat{\mathbf{r}}(\theta, \phi)$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta, \phi)$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi)$. 例如 P 的球坐标为 $(1, \pi/2, 0)$, 直角坐标为 $(1, 0, 0)$ 时, $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{y}}$. 但是球坐标为 $(1, \pi/2, \pi/2)$, 直角坐标为 $(0, 1, 0)$ 时, $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\mathbf{x}}$. 一般地, 对于球坐标为 (r, θ, ϕ) 的

点 $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ 与 $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ 的关系见球坐标与直角坐标的转换^[42]. 另外注意改变 r 时 $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ 都保持不变, 且 $\hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi)$ 仅由坐标 ϕ 决定.

三个坐标按照 (r, θ, ϕ) 排序, 是为了使对应的单位矢量满足 $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$ (类比直角坐标系的三个单位矢量必须满足 $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$, 见矢量的叉乘^[149]). 这也是所有正交曲线坐标系的要求.

球坐标系中矢量的两种表示方法

球坐标系中, 矢量可以用球坐标 (r, θ, ϕ) 表示, 即矢量以原点为起点, 以终点的球坐标表示该矢量.

更常见的方法, 是将矢量投影到 3 个单位矢量上 (当然, 要说明是关于哪个点的单位矢量), 用单位矢量的线性组合来表示. 在矢量分析中, 这种方法常用于表示矢量场.

例如任意一点 $P(r, \theta, \phi)$ 的位矢^[198] 都可以表示为 $r \hat{\mathbf{r}}$. 又如原点处电荷 q 产生的电场为 $\mathbf{E} = kq \hat{\mathbf{r}}/r^2$. 又如一个绕 z 轴逆时针旋转 (角速度 ω) 的圆柱, 在 P 点的线速度为

$$\mathbf{v} = \omega r \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (2)$$

两方向的夹角

预备知识 内积^[146]

若已知球坐标系中两个方向分别为 $(1, \theta_1, \phi_1)$ 和 $(1, \theta_2, \phi_2)$ 如何求它们之间的夹角 α 呢? 我们可以先计算两个单位矢量的直角坐标, 然后对它们进行内积即可得到两矢量夹角的余弦值. 由, 两矢量的直角坐标分别为

$$(\sin \theta_1 \cos \phi_1, \sin \theta_1 \sin \phi_1, \cos \theta_1) \quad (\sin \theta_2 \cos \phi_2, \sin \theta_2 \sin \phi_2, \cos \theta_2) \quad (3)$$

利用三角恒等式, 得

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \theta_1 \cos \phi_1 \cos \theta_2 \cos \phi_2 + \cos \theta_1 \sin \phi_1 \cos \theta_2 \sin \phi_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2) + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (4)$$

一元函数的对称与周期性

轴对称，即当横坐标到对称轴的距离相等时，函数值也相等

$$f(a+x) = f(a-x) \quad (1)$$

中心对称，即当横坐标到对称轴的距离相等时，函数值互为相反数

$$f(a+x) = -f(a-x) \quad (2)$$

周期性，即横坐标经过一定长度后的函数值相等，

$$f(a+x) = f(x) \quad (3)$$

其中， a 分别为对称轴、对称中心和周期 T ，现在来看同时含有参数 a 和参数 b 的情况

$$\text{轴对称: } f(a+x) = f(b-x) \quad (4)$$

$$\text{中心对称: } f(a+x) = -f(b-x) \quad (5)$$

$$\text{周期性: } f(a+x) = f(b+x) \quad (6)$$

其对称轴、对称中心、周期分别为： $x = (a+b)/2$ ， $((a+b)/2, 0)$ 和 $T = |b-a|$.

若 $f(x)$ 关于直线 $x = a$ 与直线 $x = b$ 对称，则 $f(x)$ 的一个周期为 $2|b-a|$

若 $f(x)$ 关于点 $(a, 0)$ 与点 $(b, 0)$ 对称，则 $f(x)$ 的一个周期为 $2|b-a|$

若 $f(x)$ 关于直线 $x = a$ 与点 $(b, 0)$ 对称，则 $f(x)$ 的一个周期为 $4|b-a|$

球坐标与直角坐标的转换

预备知识 球坐标系的定义^[39]，四象限 Arctan 函数^[35]

当我们讨论球坐标和直角坐标的转换时，通常令两个原点重合，取极轴 ($\theta = 0$) 为 z 轴的正方向， $\theta = \pi/2$ ， $\phi = 0$ 为 x 轴的正方向， $\theta = \pi/2$ ， $\phi = \pi/2$

为 y 轴的正方向. 这时两种坐标之间的变换关系为.

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \text{Arctan}(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \\ \phi = \text{Arctan}(y, x) \end{cases} \quad (2)$$

其中 Arctan 函数 (也记为 atan2) 的定义见式 1 [35]. 注意根据式 1, 同一个直角坐标可以对应不同的极坐标, 例如将 ϕ 增加 2π 的整数倍, 由例如对 z 轴上的点 ϕ 可以取任意值. 但根据式 2, 我们可以找到两种坐标间的一一对应[17] 关系.

矢量的变换

两组基底之间的变换关系为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = R_{11}\hat{\mathbf{x}} + R_{12}\hat{\mathbf{y}} + R_{13}\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = R_{21}\hat{\mathbf{x}} + R_{22}\hat{\mathbf{y}} + R_{23}\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = R_{31}\hat{\mathbf{x}} + R_{32}\hat{\mathbf{y}} + R_{33}\hat{\mathbf{z}} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = R_{11}\hat{\mathbf{r}} + R_{21}\hat{\boldsymbol{\theta}} + R_{31}\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} = R_{12}\hat{\mathbf{r}} + R_{22}\hat{\boldsymbol{\theta}} + R_{32}\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = R_{13}\hat{\mathbf{r}} + R_{23}\hat{\boldsymbol{\theta}} + R_{33}\hat{\boldsymbol{\phi}} \end{cases} \quad (4)$$

其中 \mathbf{R} 是关于两个角度的三维旋转矩阵[169]

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

若任意矢量 \mathbf{v} 在直角坐标系和球坐标系中分别表示为

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}} \quad (6)$$

$$\mathbf{v} = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + v_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (7)$$

则坐标变换关系可以用矩阵乘法表示

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\phi \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \mathbf{R}^T \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\phi \end{pmatrix} \quad (9)$$

推导

把空间中一点 P 的位矢 $r \hat{\mathbf{r}}$ 分解为垂直于 xy 平面的分量 $z = r \cos \theta$ 和 xy 平面的分量 $r \sin \theta$. 后者又可以进而分解成 x 分量和 y 分量 $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, 这就得到了式 1.

在直角坐标系中, 有 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 代入式 1 中的三条关系, 就可以很容易解出式 2 中的三条关系.

现在推导变换关系 (式 3). 由于 $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ 都是关于 (r, θ, ϕ) 的函数, 所以在考察一点 (r, θ, ϕ) 时, $\hat{\mathbf{r}}$ 的球坐标是 $(1, \theta, \phi)$, 根据式 1 变换到直角坐标为

$$(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (10)$$

写成矢量的形式, 就是

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \quad (11)$$

至于式 3 的第二条式子, 在同一个球坐标 (r, θ, ϕ) 处, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的球坐标为 $(1, \theta + \pi/2, \phi)$, 根据式 1 变换到直角坐标再化简就得到直角坐标和对应的矢量形式为

$$(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \quad (12)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}} \quad (13)$$

同理可得式 5. 将基底变换式 3 和式 4 分别代入式 7 和式 6 得坐标变换式 9 和式 8.

圆锥曲线的极坐标方程

预备知识 极坐标的定义^[36]

结论

圆锥曲线的极坐标方程为

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad (1)$$

其中 e 是离心率, p 是半通径.

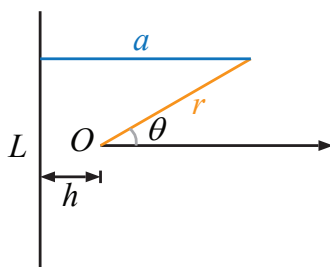


图 1: 由离心率定义圆锥曲线

推导

圆锥曲线的一种定义 (与其他定义等效) 为 (图 1): 平面上有一点 O 和一条直线 L , 相距为 h . 平面上某一点到 O 的距离为 r , 到 L 的 (垂直) 距离为 a , 令常数 $e > 0$, 则所有满足

$$r/a = e \quad (2)$$

的点组成的曲线就是圆锥曲线. e 是常数, 叫做离心率, O 是焦点, L 是准线. 当 $e = 0$ 时曲线是圆⁷, $0 < e < 1$ 时是椭圆, $e = 1$ 时是抛物线, $e > 1$ 时是双曲线.

⁷注意根据定义, 圆的准线为无穷远, 所以只能使用式 1 而不能用式 4. 所以在图 2 中, 圆的半径为无穷小.

以 O 点为原点, 使极轴垂直于准线 (如上图). 则 $a = h + r \cos \theta$, 根据式 2 得

$$\frac{r}{h + r \cos \theta} = e \quad (3)$$

变形, 得

$$r = \frac{eh}{1 - e \cos \theta} \quad (4)$$

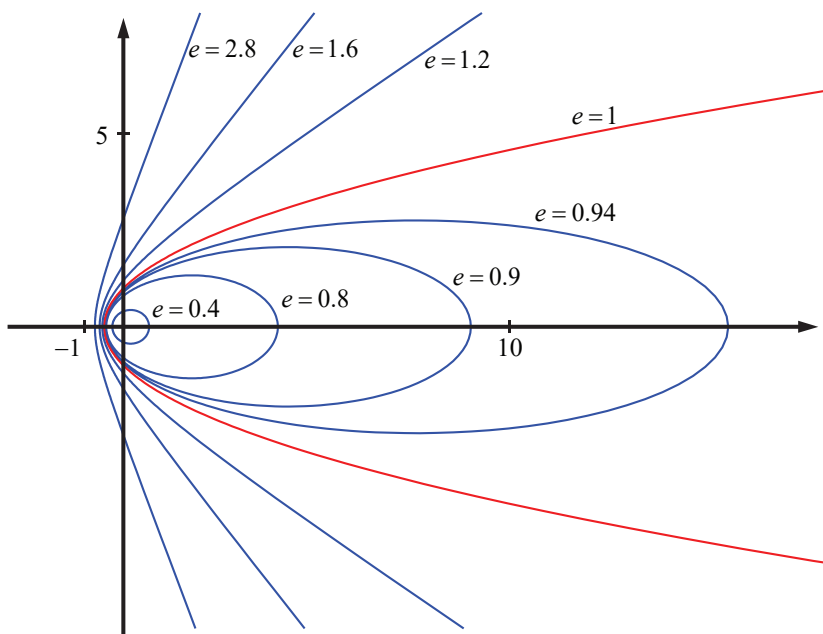


图 2: 不同离心率 e 的圆锥曲线

若定义圆锥曲线的**通径**为过焦点且平行于准线的直线被圆锥曲线截出的线段, 令其长度为 $2p$, 那么有 $r(\pi/2) = p$. 代入式 4 得 $p = eh$. 所以式 4 又可以写为

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad (5)$$

注意 p 和 e 分别控制圆锥曲线的大小和形状. 由于抛物线的 $e = 1$ 不变, 所以所有抛物线的形状都相同.

式 5 中一种比较特殊的情况是当圆锥曲线为双曲线 ($e > 1$) 且 $1 - e \cos \theta < 0$ 时 r 取负值, 会产生双曲线的左半支 (即离焦点较远的一支, 图中未画出). 左半支上的任意一点同样满足式 2. 若只需要在极坐标中表示较远的一支, 我们可以将式 5 中的 r 替换为 $-r$, θ 替换为 $\theta + \pi$, 这样, 就得到了这支双曲线

的正常极坐标方程 ($r > 0$)

$$r = -\frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (6)$$

椭圆的三种定义

预备知识 圆锥曲线的极坐标方程^[45]

第二种定义

我们已经知道用焦点和准线如何定义椭圆，但从椭圆的极坐标公式难以看出椭圆的对称性，这里用相同的定义推导直角坐标的表达式。我们不妨先以一个焦点为原点定义直角坐标系，且令 x 轴指向另一个焦点，则有

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1)$$

代入椭圆的极坐标方程式 1^[45] 得

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p + ex \quad (2)$$

两边平方并整理得

$$(1 - e^2) \left(x - \frac{ep}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{1 - e^2} \quad (3)$$

由此可见，如果我们把椭圆左移 $ep/(1 - e^2)$ ，椭圆将具有

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

的形式。其中 a 为半长轴， b 为半短轴。这就是椭圆的第二种定义，即把单位圆沿两个垂直方向分别均匀拉长 a 和 b 。下面来看系数的关系。首先定义椭圆的焦距为焦点到椭圆中心的距离（即以上左移的距离）为

$$c = \frac{ep}{1 - e^2} \quad (5)$$

式3和式4对比系数得

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (6)$$

以上两式可以将椭圆的极坐标方程转为直角坐标方程. 另外易证

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (7)$$

若要从直角坐标方程变回极坐标方程, 将式5式6逆转得

$$e = \frac{c}{a} \quad p = \frac{b^2}{a} \quad (8)$$

第三种定义

椭圆的第三种定义是, 椭圆上任意一点到两焦点的距离之和等于 $2a$. 现在我们来证明前两种定义下的椭圆满足这个条件. 由直角坐标方程可知对称性, 可在椭圆的两边做两条准线, 令椭圆上任意一点到两焦点的距离分别为 r_1 和 r_2 , 到两准线的距离分别为 d_1 和 d_2 , 则有

$$e = \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \frac{r_1 + r_2}{d_1 + d_2} \quad (9)$$

所以

$$r_1 + r_2 = e(d_1 + d_2) = 2e(c + h) = 2\frac{c}{a} \left(c + \frac{b^2}{c} \right) = 2a \quad (10)$$

证毕.

双曲线的三种定义

预备知识 圆锥曲线的极坐标方程^[45]

第二种定义

我们已经知道用焦点和准线如何定义双曲线, 双曲线的极坐标方程为 ($e > 1$)

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad (1)$$

以与极坐标系相同的原点建立直角坐标系，要把以上方程变到直角坐标系中，将 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， $\cos \theta = x/\sqrt{x^2 + y^2}$ 代入得

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p + ex \quad (2)$$

两边平方且化简得

$$\frac{(e^2 - 1)^2}{p^2} \left(x + \frac{ep}{e^2 - 1} \right)^2 - \frac{e^2 - 1}{p^2} y^2 = 1 \quad (3)$$

把双曲线沿 x 轴正方向移动 c ，可得以下形式

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

这就是双曲线的第二种定义，从上式容易看出，双曲线的两支是左右对称的。以上两式对比系数得

$$a = \frac{p}{e^2 - 1} \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} \quad c = \frac{ep}{e^2 - 1} \quad (5)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (6)$$

用 a, b, c 表示 e, p 有

$$e = \frac{c}{a} \quad p = \frac{b^2}{a} \quad (7)$$

由离心率的定义，双曲线的焦点到准线的距离为 $p/e = b^2/c$ ，准线的坐标为 $c - p/e = a^2/c$ 。由对称性，双曲线有两个焦点和两条准线，任意一个焦点到双曲线两支的任意一点比上该点到焦点同侧准线的距离都等于离心率。

第三种定义

双曲线的另一种定义是，曲线上任意一点到两个焦点距离之差等于 $2a$ 。这里证明前两种定义满足该性质。由对称性，我们不妨只考虑右支上的某点，令其到右焦点和右准线的距离分别为 r_1 和 d_1 ，到左焦点和左准线的距离分别为 r_2 和 d_2 。由离心率的定义，有

$$e = \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \frac{r_2 - r_1}{d_2 - d_1} \quad (8)$$

由于两准线之间的距离恒为 $2a^2/c$ ，上式变为

$$r_2 - r_1 = e(d_2 - d_1) = 2a \quad (9)$$

证毕。

渐近线

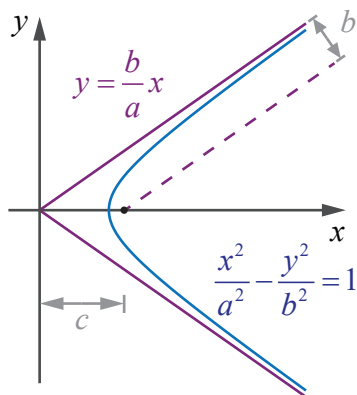


图 1: 双曲线的渐近线

当 x, y 都无穷大时, 式 4 中的 1 可以忽略不计, 有 $y/x = \pm b/a$, 渐近线与 x 轴夹角为

$$\theta_0 = \arctan(b/a) \quad (10)$$

两条渐近线到两个焦点的距离都为

$$c \sin \theta_0 = c \cdot b/c = b \quad (11)$$

事实上这么推导渐近线并不严谨, 在学习了高数的相关内容 (见“泰勒展开”?) 后, 由式 4 得

$$y = \frac{bx}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \quad (12)$$

把根号部分关于 a^2/x^2 进行泰勒展开, 有

$$y = \frac{b}{a}x - \frac{ab}{2x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad (13)$$

所以当 $x \rightarrow \infty$ 时, 就有渐近线 $y = bx/a$. 之所以要这样做, 是为了防止式 13 右边出现常数项. 如果存在常数项 λ , 那么双曲线的渐近线就是 $y = bx/a + \lambda$ 了.

抛物线的三种定义

预备知识 圆锥曲线的极坐标方程^[45]

第二种定义

我们已经知道用焦点和准线如何定义抛物线，抛物线的极坐标方程为

$$r = \frac{p}{1 - \cos \theta} \quad (1)$$

以与极坐标系相同的原点建立直角坐标系，要把以上方程变到直角坐标系中，将 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， $\cos \theta = x/\sqrt{x^2 + y^2}$ 代入得

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p + x \quad (2)$$

两边平方并化简得到

$$y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right) \quad (3)$$

把双曲线沿 x 轴正方向移动 $p/2$ ，可得标准抛物线方程

$$y^2 = 2px \quad (4)$$

所以抛物线的焦距为 $f = p/2$ 。与椭圆和双曲线不同的是，所有的抛物线的形状都相似（形状相同，大小不同），这是因为抛物线有固定的离心率（离心率决定圆锥曲线的形状，焦距或准线决定大小）。

第三种定义

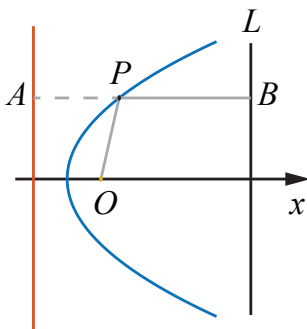


图 1: 抛物线的第三种定义

在 x 轴正半轴作一条与准线平行的直线 L ，则抛物线上一点 P 到其焦点的距离 r 与 P 到 L 的距离之和不变。

如图 1，要证明由焦点和准线定义的抛物线满足该性质，只需过点 P 作从准线到直线 L 的垂直线段 AB ，由于 r 等于线段 PA 的长度，所以 r 加上 PB 的长度等于 AB 的长度，与 P 的位置无关。证毕。

圆锥曲线的光学性质

预备知识 椭圆的三种定义^[47]，抛物线的三种定义^[50]，双曲线的三种定义^[48]

首先，对于本词条涉及到的部分几何概念作出如下规定：

- **角度**：所有角大小均取弧度制 $[0, \pi]$ 范围内的值（不区分始边终边，不区分正负角）；
- **补角**：角的其中一条边的反向延长线与该角的另一条边所形成的角，称为该角的补角（如图 1， $\angle A'BC$ 是 $\angle ABC$ 的补角， $\angle A'BC + \angle ABC = \pi$ ）；

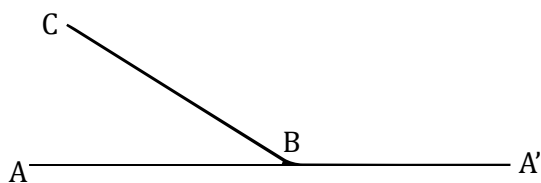


图 1: 补角

- **角平分线**：到角两边的距离相等的点的集合（把角分为大小相等的两部分的直线），称为该角的角平分线。

对两种特殊角的情形作出如下补充：

- **零角**（如图 2， $\angle ABC = 0$ ）的补角为平角（ $\angle ABA' = \pi$ ），零角的平分线与角两边重合（直线 AA' 即 $\angle ABC$ 的平分线）；

- 平角（如图 2， $\angle ABA' = \pi$ ）的补角为零角（ $\angle ABC = 0$ ），平角的平分线与角两边垂直（ AA' 的垂线 BN 即 $\angle ABA'$ 的平分线）。

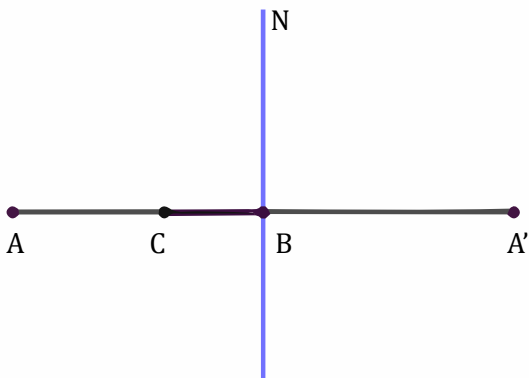


图 2: 零角和平角

显然，对所有角而言，角平分线与该角的补角平分线互相垂直。

椭圆的光学性质

F_1, F_2 是椭圆的两个焦点， P 是椭圆上任意一点，则 $\angle F_1PF_2$ 的补角平分线 PT 是椭圆的切线。

几何法证明

作点 F_2 关于直线 PT 的对称点 F_2' 。由于 PT 是 $\angle F_1PF_2$ 的补角平分线，则 F_2' 在 F_1P 的延长线上。

记 Q 是直线 PT 上的任意一点。于是

$$F_1Q + F_2Q = F_1Q + F_2'Q \geq F_1F_2' = F_1P + F_2P \quad (1)$$

当且仅当 P, Q 重合时，不等式（式 1）为等式。

椭圆的一种定义^[47]为：平面上到两焦点的距离之和为定值的点的集合。显然，椭圆内任意一点到两焦点距离之和小于该定值，而椭圆外任意一点到两焦点距离之和大于该定值。

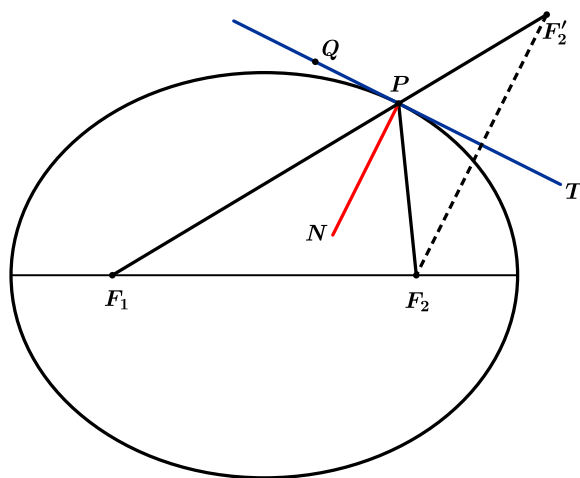


图 3: 椭圆的光学性质

所以, 直线 PT 上有且仅有点 P 在椭圆上, 其他点都在椭圆外. 这就证明了 PT 是椭圆的切线.

等价的命题

结合光在同一介质中直线传播的性质, 以及光的反射定律——反射角等于入射角, 不难推知, 上述几何命题等价于物理命题“真空或同种均匀介质中, 从椭圆一个焦点处射出的光线经过在椭圆曲线上的反射后, 反射光线都汇聚于另一个焦点”.

解析法推导

记椭圆的直角坐标方程为

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad (2)$$

其中 $a > b > 0, c > 0$ 且 $c^2 = a^2 - b^2$, 椭圆焦距为 $2c$.

将 y 视作 x 的函数, 对方程式 2 等号两边关于 x 求导, 可得

$$b^2x + a^2yy' = 0 \quad (3)$$

$P(x_0, y_0)$ 是椭圆上任意一点, 则点 P 处的椭圆切线方程为

$$a^2y_0(y - y_0) = -b^2x_0(x - x_0) \Rightarrow b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2 \quad (4)$$

由切线方程可得椭圆在点 P 处的一个法向量（与切线垂直的向量）为 $\mathbf{n} = (b^2x_0, a^2y_0)$.

向量 $\overrightarrow{F_1P} = (x_0 + c, y_0)$, $\overrightarrow{F_2P} = (x_0 - c, y_0)$.

记两个任意向量（ \mathbf{s} 和 \mathbf{t} ）的夹角为 $\langle \mathbf{s}, \mathbf{t} \rangle$. 则

$$\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{F_1P} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{F_1P}}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{F_1P}|} = \frac{b^2x_0(x_0 + c) + a^2y_0^2}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2} \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2}} \quad (5)$$

$$\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{F_2P} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{F_2P}}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{F_2P}|} = \frac{b^2x_0(x_0 - c) + a^2y_0^2}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2} \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2}} \quad (6)$$

式 5 和式 6 作比, 并代入式 2 及 $c^2 = a^2 - b^2$ 进行化简

$$\begin{aligned} \frac{\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{F_1P} \rangle}{\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{F_2P} \rangle} &= \frac{a^2b^2 + b^2cx_0}{a^2b^2 - b^2cx_0} \sqrt{\frac{(x_0 - c)^2 + y_0^2}{(x_0 + c)^2 + y_0^2}} \\ &= \frac{a^2 + cx_0}{a^2 - cx_0} \sqrt{\frac{a^2(x_0 - c)^2 + a^2b^2 - b^2x_0^2}{a^2(x_0 + c)^2 + a^2b^2 - b^2x_0^2}} \\ &= \frac{a^2 + cx_0}{a^2 - cx_0} \sqrt{\frac{c^2x_0^2 + a^4 - 2a^2cx_0}{c^2x_0^2 + a^4 + 2a^2cx_0}} \\ &= \frac{a^2 + cx_0}{a^2 - cx_0} \sqrt{\frac{(a^2 - cx_0)^2}{(a^2 + cx_0)^2}} \end{aligned} \quad (7)$$

由于点 P 在椭圆上, 则 $-a \leq x_0 \leq a$, 则 $a^2 - cx_0 > 0$, 因此

$$\frac{\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{F_1P} \rangle}{\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{F_2P} \rangle} = 1 \quad (8)$$

所以 $\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{F_1P} \rangle = \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{F_2P} \rangle$, 满足入射角等于反射角的反射定律. 由此用解析几何的方法推导出了椭圆的光学性质.

抛物线的光学性质

F 是抛物线的焦点, l 是准线, P 是抛物线上的任意一点, 作 $PP' \perp l$, 垂足为 P' , 则 $\angle FPP'$ 的角平分线 PT 是抛物线的切线.

等价命题: 真空或同种均匀介质中, 从抛物线焦点射出的光线, 经过抛物线曲线的反射后, 反射光线平行于抛物线对称轴.

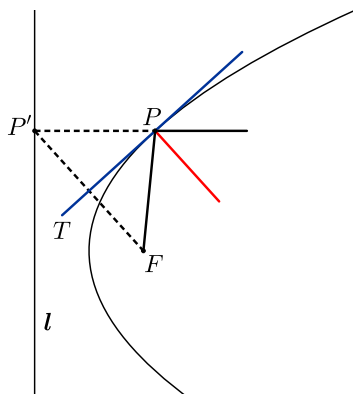


图 4: 抛物线的光学性质

双曲线的光学性质

F_1, F_2 是双曲线的两个焦点, P 是双曲线上的任意一点, 则 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PT 是双曲线的切线.

等价命题: 真空或同种均匀介质中, 从双曲线一个焦点射出的光线, 经过双曲线的反射后, 反射光的反向延长线汇聚于另一个焦点.

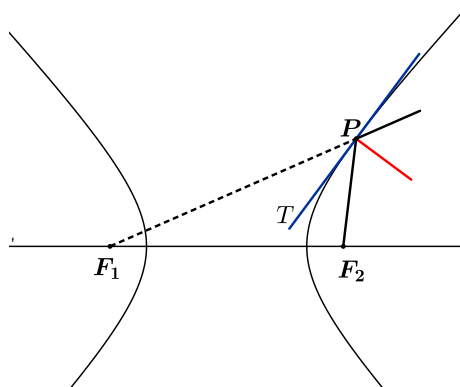


图 5: 双曲线的光学性质

习题 1 证明题

仿照椭圆光学性质的证明和推导过程, 证明抛物线和双曲线的光学性质.

预备知识 几何矢量^[133], 三角恒等式^[30], 四象限 Arctan 函数^[35]

我们首先定义一个**复数 (complex number)** 为一对有序实数⁸. 令 z 为复数, x, y 为实数, 则可以表示为 $z = (x, y)$. 其中 x, y 分别被称为复数 z 的**实部 (real part)** 和**虚部 (imaginary part)**, 可以记为 $\text{Re}[z]$ 和 $\text{Im}[z]$. 特殊地, 我们把复数 $(0, 1)$ 称为**虚数单位**, 用 i 表示⁹. 最后我们定义虚部为零的复数 $(x, 0)$ 就是实数 x 本身. 我们把所有复数的集合记为 \mathbb{C} , 那么全体实数的集合 \mathbb{R} 就是它的一个子真子集, 即 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

定义两个复数的加法为实部和虚部分别相加

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (1)$$

定义复数和实数 s 相乘为 (满足交换律)

$$s(x, y) = (x, y)s = (sx, sy) \quad (2)$$

那么任意一个复数可以表示为一个加法和一个乘法 $(x, y) = (x, 0) + y(0, 1)$, 即

$$z = x + iy \quad (3)$$

复平面

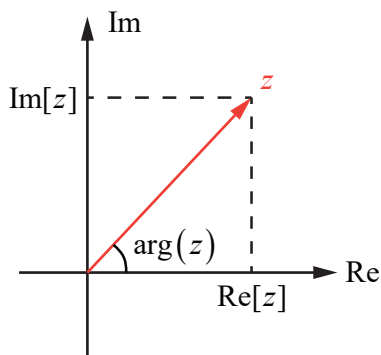


图 1: 复平面与复数

⁸一些教材常常先定义虚数单位 $i = \sqrt{-1}$ 或 $i^2 = -1$, 这种定义往往不易理解. 我们这里直接将复数定义为服从某种运算规则的实数对, 更能揭示复数的本质.

⁹为了与变量 i 区分, 本书中虚数单位使用正体的 i .

由此可以看到，复数跟二维平面上的几何矢量^[133]是十分相似的。如图 1，一个复数可以看做复平面上的一个点（或矢量），该矢量在复平面的实轴和虚轴方向的分量分别等于其实部和虚部。复数的模定义为对应矢量的模，即

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}[z]^2 + \operatorname{Im}[z]^2} \quad (4)$$

另外我们把矢量与实轴的夹角称为幅角，记为 $\arg(z)$ 。我们可以通过 Arctan 函数（式 1^[35]）计算幅角

$$\arg(z) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{Im}[z], \operatorname{Re}[z]) \quad (\arg z \in (-\pi, \pi]) \quad (5)$$

也可以通过模和幅角来计算实部与虚部

$$\operatorname{Re}[z] = |z| \cos(\arg z) \quad \operatorname{Im}[z] = |z| \sin(\arg z) \quad (6)$$

在“指数函数（复数）^[62]”中我们将看到，任意复数也可以通过欧拉公式表示为以下形式

$$z = A(\cos \theta + i \sin \theta) = Ae^{i\theta} \quad (7)$$

其中 $A = |z|$, $\theta = \arg z$ 。

基本运算

共轭

一个复数的共轭等于与其实部相同，虚部相反的复数¹⁰

$$z^* = \operatorname{Re}[z] - i \operatorname{Im}[z] \quad (8)$$

所以共轭运算不改变复数的模，但将其幅角变为相反数。在复平面上，这相当于把一个点关于 x 轴取镜像对称。

加和减

复数的加减就是把两个复数的实部与虚部分别相加减（为了书写方便，这里把复数 z_i 的实部虚部记为 x_i, y_i ）

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \quad (9)$$

¹⁰一些教材也使用 \bar{z} 表示 z 的共轭。

在复平面上，这相当于把两个复数对应的矢量进行矢量相加减。显然，复数的加法满足交换律，分配律和结合律。

特殊地，将一个复数与其复共轭加减可得

$$\operatorname{Re}[z] = \frac{1}{2}(z + z^*) \quad \operatorname{Im}[z] = \frac{1}{2}(z - z^*) \quad (10)$$

乘法

两个复数相乘定义为（注意式 1 是该定义的一种特殊情况）

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (11)$$

可以证明，乘积的模等于两复数模之积，乘积的幅角等于两复数的幅角之和，即

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad (12)$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad (13)$$

证明：令 $A_i = |z_i|$ ， $\theta_i = \arg z_i$ ，则

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (A_1 \cos \theta_1 + iA_1 \sin \theta_1)(A_2 \cos \theta_2 + iA_2 \sin \theta_2) \\ &= A_1 A_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + iA_1 A_2 (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1) \\ &= A_1 A_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned} \quad (14)$$

其中最后一步用到了两角和公式（式 3^[30]）。容易看出，最后得到的是一个模为 $A_1 A_2$ ，幅角为 $\theta_1 + \theta_2$ 的复数。证毕。

不难证明复数的乘法满足交换律和结合律。容易证明，一个复数模的平方可以用它和复共轭的乘积表示。

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = z z^* \quad (15)$$

除法

和实数一样，复数的除法也可以根据乘法定义。令 $z_1 = z z_2$ ，则两个复数相除可以记为

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \quad (16)$$

但我们可以将结果的实部与虚部分开，于是我们可以在分式上下同时乘以 z_2^* ，即 $z_1 z_2^* = z z_2 z_2^*$ ，或

$$z = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (17)$$

这个步骤叫做分母有理化。

与乘法同理，两个复数相除相当于把它们的模相除，幅角相减，即

$$|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2| \quad (18)$$

$$\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad (19)$$

根据定义易证

定理 1

两个复数进行任意次加减乘除后再取共轭，等于它们分别取共轭后再进行运算。

例如

$$\frac{2z_1 z_2}{(z_3 + z_4)^2} = \frac{2z_1^* z_2^*}{(z_3^* + z_4^*)^2} \quad (20)$$

根据式 15，式 10 和定理 1 易得

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1^* z_2 + z_2^* z_1 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}[z_1^* z_2] \quad (21)$$

在复平面中，该式可以表示余弦定理，即计算两矢量之和的模。

复变函数

预备知识 复数^[56]

复变函数是自变量和函数值都在复数域内取值的函数，通常表示为

$$w = f(z) \quad (1)$$

若把自变量用 z 的实部 x 和虚部 y 表示，函数表示成实部函数 $u(x, y)$ 和虚部函数 $v(x, y)$ 两个函数相加，则复变函数记为

$$w = u(x, y) + iv(x, y) \quad (2)$$

例如，复指数函数^[62] 被定义为

$$w = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y \quad (3)$$

由于复变函数的图像比较复杂，没有必要记忆图像，只需要知道一些基本的性质即可。

与实变函数的“兼容性”

复变函数中很多函数与我们原来我们学过的函数同名，只是自变量的范围从实数拓展到了复数。例如三角函数，对数函数，指数函数等。这些新函数的定义必须要与原来的函数“兼容”，即当自变量被限制在实数范围内取值时，这些函数与原来的函数相同。

例如，当复指数函数式 3 的自变量只在实数范围取值（即 $y = 0$ ）时，该函数变为我们原来所熟悉的 e^x 。

又如，复正弦函数^[64] 可记为

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad (4)$$

其中 \sinh 和 \cosh 是双曲正弦和双曲余弦函数。当 $y = 0$ 时，该函数变为 $\sin x$ 所以从这个意义上来说，与实变函数同名的复变函数只是把函数的定义域扩大了。

复变函数的导数

由于复变函数相当于两个实数自变量的实值函数，一般情况下求导变得非常复杂。但如果复变函数在某个域上解析，那么可以在该域上进行求导，得到唯一的导数。对于复数域初等基本函数，求导的结果也和实数域的求导一样。

幂函数（复数）

我们先来看实参数的幂函数 $f(x) = x^a$ ， $x > 0$ 时函数曲线如图 1 所示。注意 $x^{1/a}$ 是 x^a 的反函数。

当 $x < 0$ 时，可得

$$x^a = |x|^a (-1)^a = |x|^a e^{i\pi a} \quad (1)$$

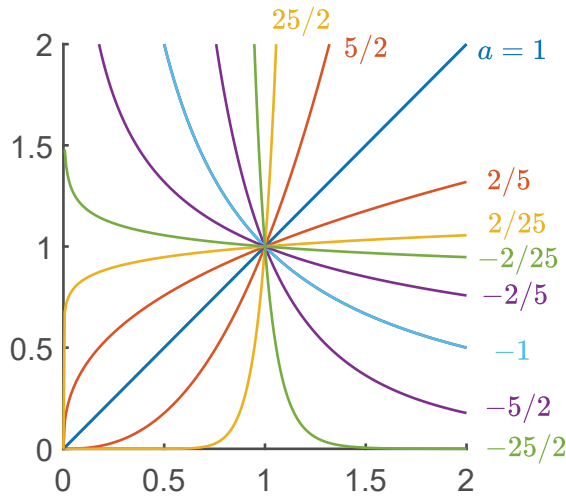


图 1: 实参数的幂函数（相同颜色的函数互为反函数）

当 a 为偶整数时, $x^a = (-x)^a$ 是偶函数, a 为奇整数时, $x^a = -(-x)^a$ 是奇函数. 当 a 为非整数时, x^a 必为复数, 其模长仍为 $|x|^a$, 幅角为常数 $e^{i\pi a}$.

复参数的幂函数

我们再来将复数的幂函数分解为模长和相位的形式（令 $z = |z|e^{i\phi(z)}$, $a = a_I + ia_R$ ）

$$z^a = |z|^{a_R} e^{-\phi(z)a_I} e^{i[\ln|z|a_I + \phi(z)a_R]} \quad (2)$$

可见 z^a 的模长和幅角都分别与 z 和 a 有关. 一般情况下, 这是一个比较复杂的函数, 含有不同的分支（因为 $\phi(z)$ 可以加整数个 2π ）. 当且仅当 a 为整数时才不会出现分支. 在数值计算中, 分支切割线出现在 $\phi(z) = \pm\pi$ 处, 这是因为数值计算通常取 $\phi(z) \in (-\pi, \pi]$.

指数函数（复数）

预备知识 指数函数, 复数^[56], 导数^[78]

复数域中的指数函数被定义为

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (1)$$

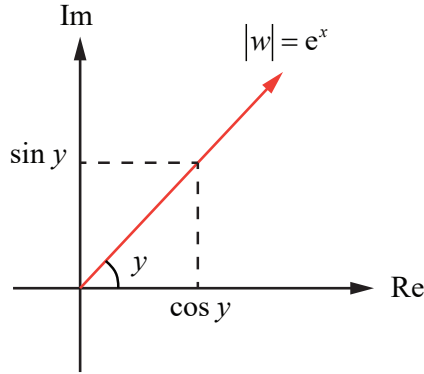


图 1: 复数域中的指数函数

在复平面上表示这个函数，则指数的实部 x 控制函数值 w 的模长，虚部 y 控制 w 的幅角，如图 1

$$|w| = e^x \quad \arg(w) = y \quad (2)$$

当指数为纯虚数时，式 1 变为著名的欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (3)$$

虽然这里的 x 一般是实数（物理中应用得最多的情况），但根据复数域三角函数的定义^[64]，对于任何复数 z ，都有欧拉公式

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (4)$$

将“三角函数（复数）^[62]”中的式 1 和式 2 代入即可证明。

根据式 1 的定义结合两角和公式（式 3^[30]），容易证明 e^z 同样满足

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \quad (5)$$

虽然我们还没有系统地学习复变函数求导的概念，但我们可以根据式 3 求出一个物理中常见的导数公式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}e^{iax} &= -a \sin(ax) + ia \cos(ax) \\ &= ia[\cos(ax) + i \sin(ax)] \\ &= ia e^{iax} \end{aligned} \quad (6)$$

进一步拓展，令复常数 $z = a + ib$ 得

$$\frac{d}{dx}e^{zx} = \frac{d}{dx}(e^{ax}e^{ibx}) = (a + ib)e^{(a+ib)x} = ze^{zx} \quad (7)$$

可见 e^z 的许多性质与实数域的 e^x 类似。

三角函数（复数）

预备知识 指数函数（复数）^[62]

定义

复数域的正弦函数为

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (1)$$

复数域的余弦函数为

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (2)$$

为什么三角函数要这么定义？因为只有这么定义，才能既“兼容”实数范围内的三角函数，同时满足解析的要求（暂不介绍解析的概念）。

与实数函数的“兼容性”

“兼容性”在这里指若将一个复变函数的自变量取实数，那么结果与使用同名的实数函数相同。例如将式 1 中的复数 z 取实数 x ，得

$$\sin z = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (3)$$

根据欧拉公式^[62],

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (4)$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad (5)$$

代入得

$$\sin z = \frac{(\cos x + i \sin x) - (\cos x - i \sin x)}{2i} = \sin x \quad (6)$$

同理可证 $\cos z = \cos x$ 。证毕。

两角和公式

利用欧拉公式，容易证明，复数范围内的正余弦函数同样满足两角和公式

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \quad (7)$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \quad (8)$$

实部和虚部

利用两角和公式，令 z_1 等于实数 x ， z_2 等于虚数 iy ，则有

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy \quad (9)$$

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy \quad (10)$$

其中

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \cosh y \quad (11)$$

$$\sin(iy) = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \frac{e^y - e^{-y}}{2} = i \sinh y \quad (12)$$

代入得

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad (13)$$

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \quad (14)$$

这样，就把正余弦的实部和虚部分开来了（当然也可以根据定义直接得到两式）。

立体角

- 本词条存在未完成的内容。

^[1]如果我们以某种锥体（例如圆锥，三棱锥，假设其无限高）的顶点作为圆心作一个半径为 1 的球（**单位球**），那么这个锥体的**立体角**（**solid angle**）就是单位球的表面被锥体截出的体积，通常用 Ω 表示。

我们知道半径为 R 的球体的表面积为 $4\pi R^2$ ，所以立体角的取值范围是 $[0, 4\pi]$ 。

例 1 圆锥的立体角

^[1]参考 Wikipedia [相关页面](#)。

预备知识 定积分^[115]

顶角为 2α 的圆锥在单位球面上可截出一个球盖. 在例 3^[115] 中我们知道球盖的面积, 所以该圆锥的立体角为

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha) \quad (1)$$

对立体角积分

未完成: 例如一个质量分布不均匀的球壳质量

第二章

一元微积分

微积分导航

从物理学巨人牛顿发明了微积分以来¹，微积分就在物理学的各个方面被大量使用。高中的物理教学有意避开了使用微积分，但从本科的学习开始，微积分与物理将形影不离。不夸张地说，不懂微积分，就几乎不懂物理。微积分最核心的内容就是极限，求导/微分，积分，微分方程和无穷级数。

本章介绍后面物理部分需要使用的微积分内容，并以帮助读者理解为主而不求严谨详尽。对于一些定理如自然对数底极限和非整数幂的二项式定理，本章只给出数值验证的方法。

极限

极限^[69]的概念是微积分的基础，大致可以理解为“某个表达式在某个量为无穷小或无穷大时所趋近的值”，例如 $1/x$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限为零， $(1+x)/(2+x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时的极限为 $1/2$ 。

导数

理解极限了以后，导数^[78]便是一个首要的应用。事实上高中物理的许多物理量都使用了导数的概念，只是没有提出“导数”这个词。例如（瞬时）速度的定义就是 $\Delta \mathbf{s}/\Delta t$ 在 $\Delta t \rightarrow 0$ （趋近于 0）时的极限，而这恰好是导数的定义，即速度是位置矢量（关于时间的函数） $\mathbf{r}(t)$ 对时间的导数。同理，加速度矢量是速度矢量（关于时间的函数）对时间求导。又例如，高中对匀速圆周运动的向心加速度的推导过程中就运用了几何微元法，在微小时间 Δt 内计算圆周运动速度矢量的微小变化^[205]。学习了矢量求导^[??]以后，就不必再使用这种不成熟的“几何微元法”，而是直接按照矢量求导法则^[205]即可严谨而轻易地得出向心加速度的公式 $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{R}$ ，甚至可以计算非匀速圆周运动乃至任意变速曲线运动的加速度。

¹一般认为牛顿和莱布尼兹都分别在十七世纪中独立地发明了微积分，然而他们都声称对方窃取了自已的成果，并为此争执了一生。

积分

高中物理中，位移 s 等于速度 v 乘以时间 t ，功 W 等于力 F 乘以位移 x 等概念都已经耳熟能详。然而如果速度随时间变化或者力随位置变化时，就不能用简单的乘法来计算这些问题。这时一个基本的思想就是把时间或位移分成许多小份，每份中的速度或力都近似为恒定不变，然后再把所有小份的位移或做功加起来即可。这时用极限的思想，求出当这些小份为无穷小（或者说分成无穷多份）时求和的极限，就得到了总位移和总功，这个过程叫做定积分^[111]。

微分方程

大量的物理定律和问题都是通过微分方程（组）来描述的。最简单的微分方程是线性常微分方程，是函数 $y(x)$ 及不同阶导 $y'(x)$, $y''(x)$ 以及自变量 x 组成的等式。例如力学中著名的弹簧振子^[233]（又称简谐振子）模型就是通过二阶线性常微分方程（二阶代表方程中出现的最高阶导数为 2）来描述的。

极限

数列的极限

先来看一个数列的例子。

例 1

我们都知道 π 是一个无理数，所以 π 的小数部分是无限多的。目前用计算机，已经可以将 π 精确地计算到小数点后数亿位。然而在实际应用中，往往只用取前几位小数的近似即可。下面给出一个数列，定义第 n 项是 π 的前 n 位小数近似（不考虑四舍五入），即

$$a_0 = 3, a_1 = 3.1, a_2 = 3.14, a_3 = 3.141, \dots \quad (1)$$

这个数列显而易见的性质，就是当 n 趋于无穷时， a_n 趋（近）于 π 。无穷通常用符号 ∞ 来表示（像“8”横过来写）。我们把这类过程叫做极限。以上这种情况，用极限符号表示，就是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pi \quad (2)$$

这里 \lim 是极限 (limit) 的意思, 下方用箭头表示某个量变化的趋势. \lim 在这里相当于一个“操作”, 叫**算符 (operator)**, a_n 是其作用的对象 (相当于函数的自变量). 算符的“输出”就是一个数 (a_n 的极限值). 所以不要误以为这条式子是说当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n = \pi$ (a_n 是有理数, π 是无理数, 等式恒不成立), 而要理解成 a_n 经过算符 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ 的作用以后, 得出其极限是 π . 类比函数 $\sin x = y$, 并不是说 $x = y$, 而是说 x 经过正弦函数作用后等于 y .

所以从概念上来说, 极限中的“趋于”和“等于”是不同的. 趋于更强调变化的过程. 趋于的意思可以粗略理解为

- 越来越接近, 但不一定相等
- (在不相等的情况下) 只有更近, 没有最近

对极限来说, 第 2 点成立是非常必要的. 但是怎样能说明“没有最近”呢? 可以看出, 当 n 越大, a_n 越接近 π , 它们的“距离”, 可以用 $|a_n - \pi|$ 来表示. 也就是说, 对任何一个 a_n , 如果所对应的距离 $|a_n - \pi| \neq 0$, 总能找到一个更大的数 $m > n$, 使 $|a_m - \pi| < |a_n - \pi|$ (更近), 并且要求之后的所有项都能满足这一条件. 只有这样, 才能从数学上说明上面两个意思. 这就是极限思想的精髓. 根据这个思想, 下面可以写出数列极限的定义.

数列极限的定义: 对于任意给定的 ε (无论它有多么小), 总存在 N , 当 $n > N$ 时, 就有 $|a_n - A| < \varepsilon$ (A 为常数) 成立, 那么数列 a_n 的极限就是 A .

在命题中, 通常把“任意”用“ \forall ” (for all) 表示, 把“存在”用“ \exists ” (there exist(s), there is (are)) 表示. 即“对 $\forall \varepsilon, \exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - A| < \varepsilon$ ”.

由于以上讨论中 \lim 作用的对象是数列, 那么箭头右边只能是 ∞ (准确来说应该是正无穷 $+\infty$, 但是由于数列的项一般是正的, 所以正号省略了).

把定义套用到上面的例一中, 如果要求 $|a_n - \pi| < 10^{-3}$ (给定 $\varepsilon = 10^{-3}$), 只要令 $N = 3$ (当然也可以令 $N = 4, N = 5$, 等) 就可以保证第 N 项后面所有的项都满足要求. 一般地如果给定 $\varepsilon = b \times 10^{-q} (b > 1)$, 就令 $N = q$, 第 N 项以后的项就满足要求. 这就从定义直接证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pi$.

函数的极限

类比数列的极限, 我们也可以定义**函数在正无穷的极限** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 即“对 $\forall \varepsilon, \exists X$, 当 $x > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ”.

与数列不同的是,对于函数我们还可以定义函数在负无穷的极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (把以上定义的 $>$ 号改成 $<$ 号即可).

另外可以定义 $f(x)$ 在 x_0 处的极限 A , 即“对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ”. 注意 $f(x)$ 不需要在 x_0 处有定义.

例 2

求函数在某个值处的极限时, 通常可以直接代入数值计算, 如

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x + 1 = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{x + 2} = \frac{3}{4} \quad (3)$$

当无穷大与常数相加时, 可以忽略常数, 如

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \quad (4)$$

无穷小的阶

如果令 $x \rightarrow 0$, 我们就说 x 是无穷小. 但一些无穷小会更快地趋近于 0, 若 x 的某个函数 $\alpha(x)$ 满足

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x} = 0 \quad (5)$$

那 $\alpha(x)$ 就是 x 的高阶无穷小. 若

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x^n} \neq 0 \quad (6)$$

则称 $\alpha(x)$ 为 x 的 n 阶无穷小. 例如, cx^n (c 为常数) 就是 x 的 n 阶无穷小, 记为 $\mathcal{O}(x^n)$.

在求极限时, 若高阶无穷小与低阶无穷小相加, 通常可以忽略高阶无穷小. 另外由定义不难推出

$$\mathcal{O}(x^n)x^m = \mathcal{O}(x^{n+m}) \quad (m > -n) \quad (7)$$

在物理中, 当我们用一个函数 $g(x)$ 来近似另一个函数 $f(x)$ 并记为 $f(x) = g(x) + \mathcal{O}(h^n)$ 时 (这里 x 是函数的自变量, h 是函数表达式中一个较小的常数), 就说 $g(x)$ 的误差为 $\mathcal{O}(h^n)$.

小角正弦极限

预备知识 极限^[69]

这里要介绍的是一个很显然的几何问题，然而它在高等数学和物理中却非常频繁地出现。

设平面上 O 点为圆心，以 R 作为半径画圆。取一段的圆心角为 θ 的圆弧 AB （令长为 l ），并作线段 AB （如图 1）。

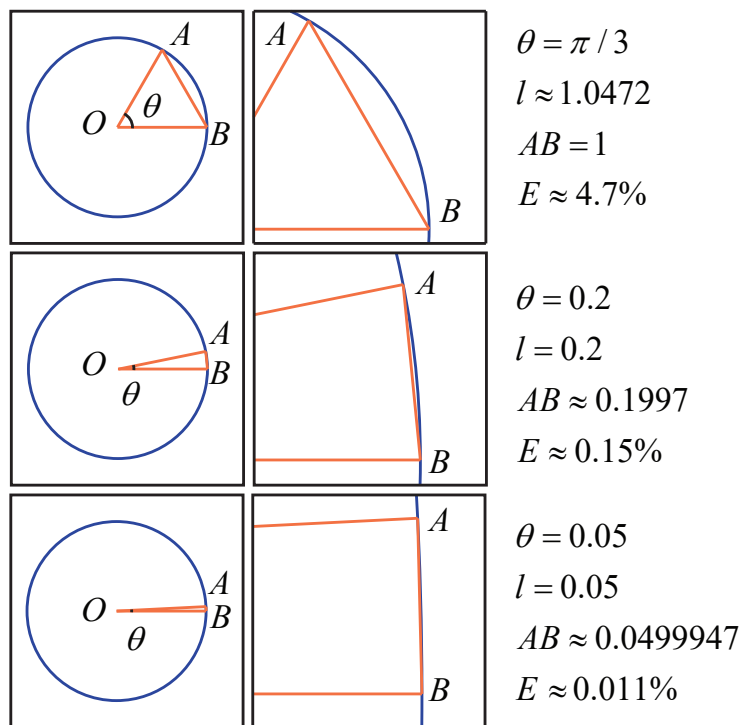


图 1: 单位圆中，随着角度不断减小，弧长与线段长度的相对误差也不断减小

由弧长公式得

$$l = R\theta \quad (1)$$

线段 AB 的长度为

$$AB = 2R \sin \frac{\theta}{2} \quad (2)$$

显然弧长 l 大于线段长度 AB （两点之间直线最短），但从图中可以看出随着 θ 越来越小，二者的相对误差（ E ）越来越小。用极限^[69]的语言来说，就是当 θ 趋近于 0 时，它们的比值趋近于 1。注意这只是一个经验上的总结，证明参考任意高等数学教材。

所以有

$$1 = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{AB}{l} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2R \sin(\theta/2)}{R\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2} \quad (3)$$

令 $x = \theta/2$ ，有

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (4)$$

这是一个非常重要的极限。在物理中，我们常常会就某个小角使用近似 $\sin x \approx x$ ，例如“单摆^[236]”以及“双缝干涉^[22]”。严格来说，这是一个一阶近似， x 就是 $\sin x$ 的泰勒展开（^[22]）的第一项。

自然对数底

预备知识 极限^[69]

微积分中有一个重要的极限，极限值是一个无理数，叫做自然对数底，记为² e 。

$$e \equiv \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.71828 \dots \quad (1)$$

e 也可以用无穷级数表示为

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots \quad (2)$$

数值验证

这里先用数值的方法验证式 1，首先我们可以画出 $(1+x)^{1/x}$ 在原点附近的函数图，注意当 $x=0$ 时，该函数无定义，但这并不妨碍极限的存在。可以看到，无论 x 从左边还是右边趋近于原点（即左极限和右极限），结果都相等。

表 1 用数值计算验证式 1 的右极限。

²为了与其他变量区分，本书使用正体字母表示自然对数底。

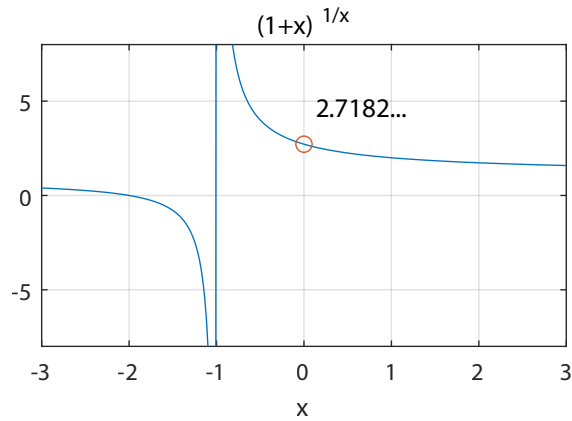
图 1: $(1+x)^{1/x}$ 的函数图

表 1: 极限 e 数值验证 (保留 6 位有效数字)

x	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$(1+x)^{1/x}$	2.59374	2.70481	2.71692	2.71815	2.71827	2.71828

自然对数函数

以 e 为底的对数函数 $\log_e x$ 叫做自然对数, 通常记为

$$\ln x \quad \text{或} \quad \log x \quad (3)$$

函数图如图 2.

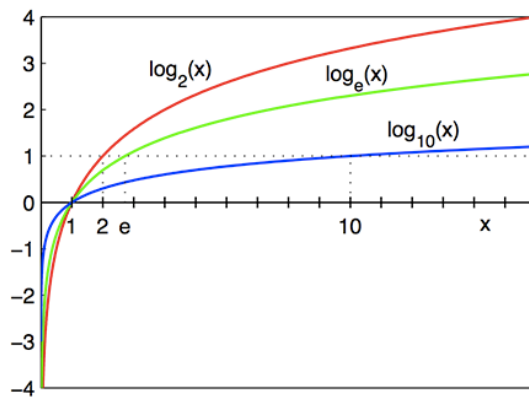


图 2: 几种不同底的对数函数

切线与割线

预备知识 极限^[69]

如图一，在一段光滑曲线上任取两点，过这两点做直线，就是曲线过 A 点与 B 点的割线（当然直线与曲线还可以有其他交点）。当 A, B 两点逐渐向 C

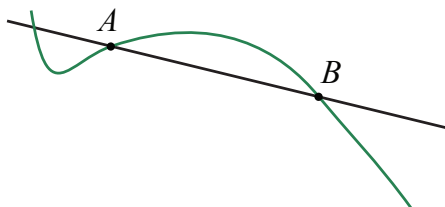


图 1: 割线

点靠近，割线的位置逐渐趋于不变，割线位置的极限^[69] 就叫做曲线在 C 点的切线。

以上对切线的定义中，假设在 A, B 两点靠近 C 点的过程中，割线位置的极限存在。如果这个极限不存在，那么 C 点没有极限。下面举一个简单的例子说明。

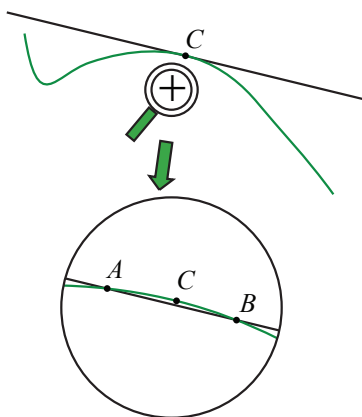


图 2: 割线的极限是切线

例如要求正方形一角的切线，用 A, B 两点接近 C 点，则无论 AB 点有多么靠近 C ，切线的位置还要取决于 AB 点的具体位置（如右图）若 B 更接近 C ，则直线就更接近竖直方向。反之直线就更接近水平方向。

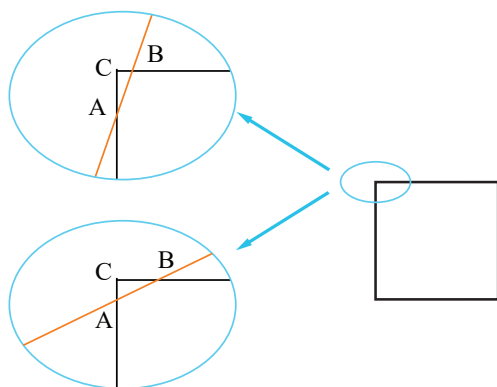


图 3: C 点不存在切线

而真正的极限，只取决于点 A , B 都趋于点 C 的事实，而不要求它们谁更趋近。所以这个极限不存在。

函数的连续性

预备知识 极限^[69]

简单来说，**连续函数**定义为：在某个区间内，函数曲线是连续的。例如常见的 $\sin x$, $\exp x$, x^2 都在整个实数域上连续，又例如 $\ln x$ 和 $1/x$ 在区间 $(0, \infty)$ 上连续， $\tan x$ 在所有 $x_n = (1/2 + n)\pi$ (n 为自然数) 处不连续， $1/x$ 在 $x = 0$ 处不连续。但这只是一些简单的情况。在一些情况下这种判断方法则显得不严谨，例如 $\sin(1/x)$ 在原点处的连续性（不连续）根据这个定义不好判断。所以我们需要一个更严谨的定义。

首先我们要讨论函数在一个点附近是否是连续的。这个概念的思想核心是，在函数曲线的某一点附近 $(x_0, f(x_0))$ ，无论我们要求 $f(x)$ 有多接近 $f(x_0)$ ，只要 x 足够靠近 x_0 ，就一定能满足条件。比如说，如果定义函数 f 为当 $x < 0$ 的时候， $f(x) = 0$ ，其它时候 $f(x) = 1$ ，那么在 $x = 0$ 这一点处 f 就是跳跃的。如果我们要求的接近程度小于 1，那么无论 x 多接近 0，只要 $x < 0$ ， $f(x)$ 和 $f(0) = 1$ 的距离就永远满足不了需要。

准确地描述以上“连续”的概念，如下所示：

定义 1 函数在一点的连续性

函数 $f(x)$ 在某点 $x = x_0$ 处连续的定义是：函数 $f(x)$ 在某点 $x = x_0$ 处连续，当且仅当对于任何精度要求 $\epsilon > 0$ ，我们都可以找到一个对应的范围 $\delta > 0$ ，使得只要 $|x - x_0| < \delta$ ，就有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 。如果一个函数在某区间的所有点都连续，我们就说它在这个区间连续。

另一个等价说法是常见的：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

注意这里要求 x 从左边和右边趋近于 x_0 时的极限（即左极限和右极限）都成立。

一致连续

以上所定义的连续性是针对一个个点 x_0 而言的，就算函数在每一个点都连续，我们也只能说这个函数是**逐点连续的**（**pointwise continuous**）。事实上，还有一种更强的连续性，它着眼于整体的性质，这就是一致连续（**uniformly continuous**）。它的准确定义如下：

定义 2 一致连续

如果函数 $f(x)$ 在区间 S 上，对于任意精度 $\epsilon > 0$ ，都存在对应的范围 $\delta > 0$ ，使得只要 $|x_1 - x_2| < \delta$ ，那么 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ 。

一致连续着眼于整个区间的性质，而不是一个个点。显然，一致连续的函数肯定逐点连续，但是逐点连续的函数不一定一致连续，我们举一个反例。

例 1

例如考虑函数 $f(x) = 1/x$ ，那么在区间 $(0, \infty)$ 上， f 就是逐点连续的，但它并不一致连续；对于同样的精度要求 $\epsilon > 0$ 和任何范围 $\delta > 0$ ，只要 $0 < x_1 < \delta$ ，那么就总有一个足够小的 x_2 使得 $|f(x_1) - f(x_2)| > \epsilon$ ，毕竟当 x_2 接近 0 的过程中， $f(x_2)$ 的斜率绝对值会趋近于无穷大。

习题 1 连续但不一致连续的函数

试证明 $1/x$ 在区间 $(0, +\infty]$ 以及 x^2 在 \mathbb{R} 都是连续的，但不是一致连续的。

定理 1

设 S 是 \mathbb{R} 的一个区间。函数 f 在 S 上逐点连续的充分必要条件是，对于

任何开区间 $A \subset \mathbb{R}$, 满足 $f(x) \in A$ 的所有 x 构成的集合, 是若干开区间的并集. 用紧凑的写法来表达就是, $f^{-1}(A)$ 是开区间的并集.

这个定理还可以等价地用闭区间来表达: f 在 S 上逐点连续的充分必要条件是, 任何闭区间的逆映射是闭区间的并集.

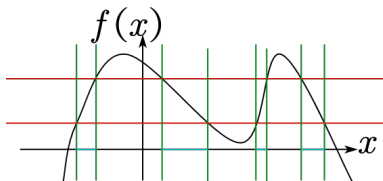


图 1: 如图, 红色水平线在 $f(X)$ 轴上划分出了一个开/闭区间, 绿色垂直线是取反函数的过程, x 轴上的靛蓝色线段就是取反函数的结果. 从这个图可以直观地看出定理 1 的意义.

在实数轴上, 开集被定义为任何开区间的并集, 而闭集是开集的补集. 如果 S 是 \mathbb{R} 的一个子集, 那么 S 上的开集被定义为 \mathbb{R} 的开集和 S 的交集. 这样一来, 定理 1 就可以扩展为: f 在 S 上逐点连续, 等价于对于任何开集 A , $f^{-1}(A) \cap S$ 是 S 上的开集, 等价于对于任何闭集 B , $f^{-1}(B) \cap S$ 是 S 上的闭集.

用逆映射来刻画连续性是一个非常好用的方法.

导数

预备知识 切线与割线^[75], 函数^[26]

导数的几何理解

一个一元函数 $y = f(x)$, 在直角坐标系中表示为一条曲线. 在这个曲线的光滑部分取一点 A , 并作其切线^[75].

若切线存在, 该切线与 x 轴的夹角的正切值 θ 就叫点 A 的导数. 当函数在 A 点递增时, 可能的取值为 $\theta \in (0, \pi/2)$, 即 $\tan \theta \in (0, +\infty)$. 递减时, 取 $\theta \in (-\pi/2, 0)$, 即 $\tan \theta \in (-\infty, 0)$. 当切线水平时, $\theta = \tan \theta = 0$.

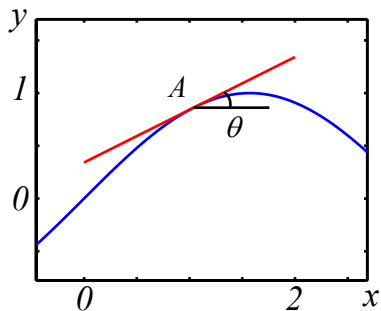


图 1: 点 A 的切线

若函数曲线在 x 的某一开区间内的每一点都可导, 则这个区间上每一个 x 对应一个导数. 将其写成关于 x 的函数 $g(x)$, $g(x)$ 就是该区间上的 **导函数**. 通常将导函数记为以下的一种 (后 3 种记号的来源见下文)

$$f'(x), [f(x)]', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx}f(x) \quad (1)$$

在物理中, 常常在物理量上方加一点表示对时间求导 (注意仅限于对时间求导), 例如 $\dot{f}(t) = df(t)/dt$.

若切线不存在 (例如折线的棱角处, 但也有其他更复杂的情况), 我们说点 A 不可导. 如果某区间内是“光滑”的, 那么该区间内处处可导.

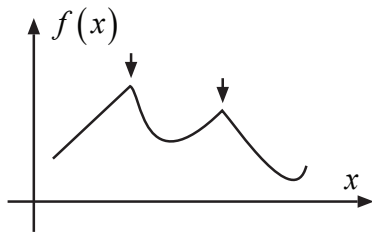


图 2: 棱角处不可导

若函数曲线在某一点附近是光滑的, 那么在这点附近取一小段, 当这一段取得足够小, 可以近似认为它是线段且与切线重合 (如下图). 以这条线段为斜边, 作一直角三角形, 令其底边长为 dx (在微积分中, 通常把非常小的一段 Δx 记为 dx , dx 是一不能分割的整体符号, 而不是两个量相乘), 竖直边的边长为 dy (当函数递增时, dy 取正值, 反之取负值). 根据上面导数的定义, $dy/dx = \tan \theta$ 就是函数的导数. 所以导数通常表示为 dy/dx , 导数的倒数则为 dx/dy .

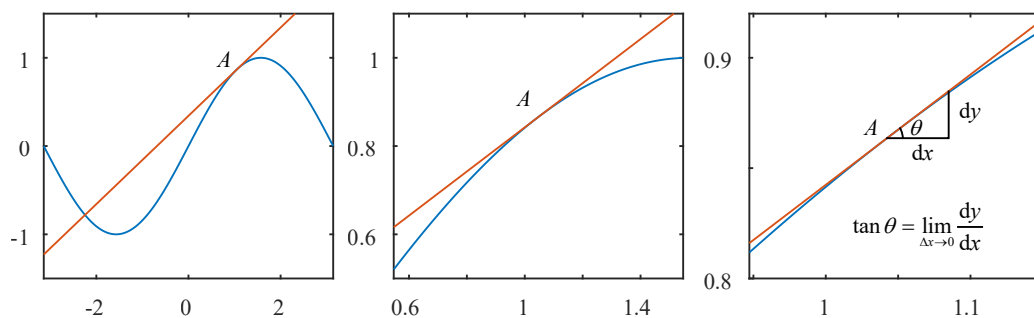


图 3: 将切点放大, 会发现切线和曲线在切点附近“重合”

由上面的讨论可得, 当 x 增加一小段 Δx 时, y 轴的增量约为 $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$, 且当 Δx 越小, 这条式子就越精确成立, 记为 $dy = f'(x) dx$. 这个关系就叫函数的微分.

导数的代数理解

导数的代数理解就是: 一个量关于另一个量的变化率. 例如质点直线运动时, 速度的大小就是其路程对时间的导数. 把这种描述用极限^[69]表达出来就是

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2)$$

在图 3 的右图中, Δx 的始末位置并不非常重要, 既可以从 x 取到 $x + \Delta x$, 也可以从 $x - \Delta x$ 取到 x 等等 (因为当 Δx 非常小的时候, x 附近的曲线基本处处跟切线重合, 它们的斜率都是一样的). 所以导数的定义也有其他类似的形式

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (3)$$

虽然上面用到了诸如“近似”等词, 但根据定义, 极限都是精确的.

例子: 速度加速度 (一维)^[199].

求导法则

预备知识 基本初等函数的导数^[84]

结论

如果要求导的函数可以看做若干个已知导函数的函数（如基本初等函数）经过四则运算或复合得到的，那么我们可以直接使用一系列求导法则对其求导

四则运算

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x) \quad (1)$$

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (2)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2} \quad (3)$$

复合函数

$$f[g(x)]' = f'[g(x)]g'(x) \quad (4)$$

详细见“一元复合函数求导（链式法则）^[93]”

线性

对求导而言，**线性**是指若干**函数线性组合**（即把若干个函数分别乘以常数再相加）的求导等于对这些函数先分别求导再进行同样的线性组合。由于函数加减法属于函数线性组合的两种简单情况，这里只需要证明求导运算是线性的，即求导是一种**线性运算**即可。令若干常数为 c_i ，若干可导函数为 $f_i(x)$ ，根

据导数的定义, 这些函数线性组合的导数为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sum_i c_i f_i(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sum_i c_i f_i(x+h) - \sum_i c_i f_i(x) \right] / h \\ &= \sum_i c_i \lim_{h \rightarrow 0} [f_i(x+h) - f_i(x)] / h \\ &= \sum_i c_i f'_i(x)\end{aligned}\quad (5)$$

例 1 对函数 $f(x) = 5 \sin x + 3x^2$ 求导

这里的 $f(x)$ 可以看做三角函数 $\sin x$ 函数和幂函数 x^2 的线性组合, 二者都是基本初等函数, 导数分别为 $\cos x$ 和 $2x$, 由于求导是线性运算, 我们只需要对两个函数各自的导函数进行同样的线性组合即可

$$f'(x) = 5 \sin' x + 3(x^2)' = 5 \cos x + 3(2x) = 5 \cos x + 6x \quad (6)$$

两函数相乘的导数

令两函数分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$, 现在求 $f(x)g(x)$ 的导函数. 由导数的定义式 2^[78] 得

$$[f(x)g(x)]' = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)] / h \quad (7)$$

从几何上来看, 我们可以把 $f(x)g(x)$ 看做一个矩形的面积 (未完成)

反函数求导

预备知识 导数^[78]

结论

若已知 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 则 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的导函数为

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} \quad (1)$$

为了消除上式可能产生的歧义, 记 $f(x)$ 的导函数为 $h(x)$, $f(x)$ 的反函数为 $g(x)$. 上式变为

$$g'(x) = \frac{1}{h[g(x)]} \quad (2)$$

反函数存在的条件

函数 $y = f(x)$, 在某个区间 (x_1, x_2) 内连续且单调, 且 x 与 y 一一对应. 因为如果一个 y 有多个 x 对应, 反函数中将会出现一个 x 对应多个 y 的情况.

反函数的定义

令满足上述条件的某函数和反函数分别为 $f(x)$, $g(x)$, 在有定义的区间内的任何一对满足 $y = f(x)$ 的 x, y 都满足 $g(y) = x$, 则 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数.

证明

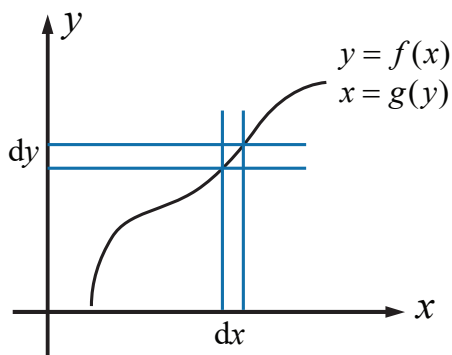


图 1: 在同一点处, $f' = dy/dx$, $g' = dx/dy$, 互为倒数

根据导数和微分的关系, $y = f(x)$ 在曲线上的某点 (x_0, y_0) , 有

$$dy = f'(x_0) dx \quad (3)$$

同一点也满足 $g(y_0) = x_0$, 且

$$g'(y_0) dy = dx \quad (4)$$

对比式 3 和式 4, 得

$$g'(y_0) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (5)$$

可见图 1 曲线上同一点处 f' 和 g' 互为倒数. 把 $x_0 = g(y_0)$ 代入上式, 得

$$g'(y_0) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'[g(y_0)]} \quad (6)$$

上式中, y_0 可以是 g 函数定义域的任意一点, 所以

$$g'(y) = \frac{1}{f'[g(y)]} \quad (7)$$

或者用习惯上的 x 作为自变量, 得

$$g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]} \quad (8)$$

证毕.

基本初等函数的导数

预备知识 导数^[78]

基本初等函数

基本初等函数由以下五类函数构成 (a 是常数)

- 幂函数

$$x^a \quad (a \in R) \quad (1)$$

- 指数函数

$$a^x \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (2)$$

- 对数函数

$$\log_a x \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (3)$$

当底为 $a = e$ 时, 叫做自然对数函数, 记为 $\ln x$.

- 三角函数

$$\sin x \quad \cos x \quad \tan x \quad (4)$$

- 反三角函数

$$\arcsin x \quad \arccos x \quad \arctan x \quad (5)$$

由以上函数经过有限次四则运算和有限次函数复合所构成并可用一个式子表示的函数, 称为初等函数. 例如

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad y = \sin^2 x \quad y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}} \quad (6)$$

基本初等函数的导数

基本初等函数在其定义域内都是可导的，导函数如下

- 幂函数

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad (a \in R) \quad (7)$$

- 三角函数

$$\sin' x = \cos x \quad \cos' x = -\sin x \quad \tan' x = 1/\cos^2 x = \sec^2 x \quad (8)$$

- 指数函数

$$(a^x)' = \ln(a)a^x \quad (9)$$

特殊地, $(e^x)' = e^x$

- 对数函数

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln(a)x} \quad (10)$$

特殊地, $\ln' x = 1/x$.

幂函数证明

由导数的代数定义, $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)]/h$, 而

$$(x+h)^a - x^a = x^a[(1+h/x)^a - 1] \quad (11)$$

由于 $h \rightarrow 0$, $h/x \rightarrow 0$. 令 $\varepsilon = h/x$, 由非整数二项式定理^[27],

$$(1+\varepsilon)^a = 1 + a\varepsilon + \frac{a(a-1)}{2!}\varepsilon^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}\varepsilon^3 \dots \quad (12)$$

所以

$$\begin{aligned} (x^a)' &= x^a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(1+\varepsilon)^a - 1}{\varepsilon x} \\ &= x^{a-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(a + \frac{a(a-1)}{2!}\varepsilon + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}\varepsilon^2 \dots \right) = ax^{a-1} \end{aligned} \quad (13)$$

正弦函数证明

使用三角函数和差化积公式化简极限

$$\sin' x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \quad (14)$$

由小角正弦值极限^[72]中的结论, 其中

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1 \quad (15)$$

所以

$$\sin' x = \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x \quad (16)$$

余弦函数证明

若 $f'(x) = g(x)$, 且 b 为任意常数, 根据导数的定义 $f'(x+b) = g(x+b)$ 同样成立 (证明略). 所以 $\sin'(x + \pi/2) = \cos(x + \pi/2)$. 而 $\sin(x + \pi/2) = \cos x$, $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$ 所以 $\cos' x = -\sin x$

正切函数证明

根据求导法则^[80], 因为 $\tan x = \sin x / \cos x$, 所以

$$\tan' x = \frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad (17)$$

对数函数证明

先证明 $\ln' x = 1/x$. $\ln(x+h) - \ln x = \ln(1+h/x)$, 所以

$$\ln' x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h/x)}{h/x} \quad (18)$$

令 $\varepsilon = h/x$, 则

$$\ln' x = \frac{1}{x} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{1}{x} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} \quad (19)$$

由自然对数底的定义, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$, 所以

$$\ln' x = \frac{\ln e}{x} = \frac{1}{x} \quad (20)$$

再证明 $\log'_a x = 1/(x \ln a)$. 由对数函数的性质 $\log_a b = \ln b / \ln a$

$$\log'_a x = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} \ln' x = \frac{1}{x \ln a} \quad (21)$$

指数函数证明

先证明 $(e^x)' = e^x$. 由于上面已经证明了 $\ln' x = 1/x$, 而 e^x 是 $\ln x$ 的反函数. 所以令 $f(x) = \ln x$, $f'(x) = 1/x$, $f^{-1}(x) = e^x$, 代入反函数的求导法则^[82]

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} \quad (22)$$

得

$$(e^x)' = \frac{1}{1/e^x} = e^x \quad (23)$$

再证明 $(a^x)' = a^x \ln a$. $(a^x)' = [(e^{\ln a} x)]' = (e^{(\ln a)x})'$. 把 $e^{(\ln a)x}$ 看成是 e^u 和 $u = (\ln a)x$ 的复合函数, 根据复合函数的求导法则^[80], $(a^x)' = (\ln a)a^x$

高阶导数

预备知识 求导法则^[80]

一个一元函数 $y = f(x)$ 可导, 如果导函数 $y' = f'(x)$ 仍可导, 则称 $y' = f'(x)$ 的导数为函数 $y = f(x)$ 的二阶导数, 记为

$$y'', \quad f''(x), \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad y''(x) \quad (1)$$

即

$$y'' = (y')', \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \quad (2)$$

由导数中的定义式^[78], 可得二阶导数的计算公式

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \quad (3)$$

若把 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 称为 $y = f(x)$ 的一阶导数, 那么, 一阶导数的导数就称为二阶导数. 若二阶导数 $y'' = f''(x)$ 仍然可导, 我们就把二阶导数的数 $y'' = f''(x)$ 的导数称为三阶导数, 记为

$$y''', \quad f'''(x), \quad \frac{d^3 y}{dx^3}, \quad \frac{d^3 f}{dx^3}, \quad y'''(x) \quad (4)$$

一般地, 如果 $y = f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数是可导的, 我们就把 $n-1$ 阶导数的导数称为 $y = f(x)$ 的 n 阶导数, 记为

$$y^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^n f}{dx^n}, \quad y^{(n)}(x) \quad (5)$$

二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数. 利用求导公式和求导法则就可以求出高阶导数.

莱布尼兹公式

预备知识 高阶导数^[87]

设函数 $u = u(x), v = v(x)$ 均有 n 阶导数, 形如 $y = uv$ 的函数的 n 阶导数, 可由莱布尼兹 (Leibniz) 公式求出.

不加推导的给出莱布尼兹公式, 可用数学归纳法证明.

$$\begin{aligned} (uv)^{(n)} = & u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' \\ & + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)} \end{aligned} \quad (1)$$

规定一个函数的零阶导数等于函数本身, 即 $u^{(0)} = u$, 于是莱布尼兹公式可以写成如下的形式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \quad (2)$$

例 1 求函数 $y = xe^{-x}$ 的 n 阶导数

可以通过莱布尼兹方程对该函数直接求 n 阶导数.

$$\begin{aligned}
 (xe^{-x})^{(n)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k (e^{-x})^{(n-k)} \\
 &= x(e^{-x})^{(n)} + n(e^{-x})^{(n-1)} \\
 &= x(-1)^n e^{-x} + n(-1)^{n-1} e^{-x} \\
 &= (-1)^{n-1} (n-x)e^{-x}
 \end{aligned} \tag{3}$$

导数与函数极值

预备知识 二阶导数^[87]

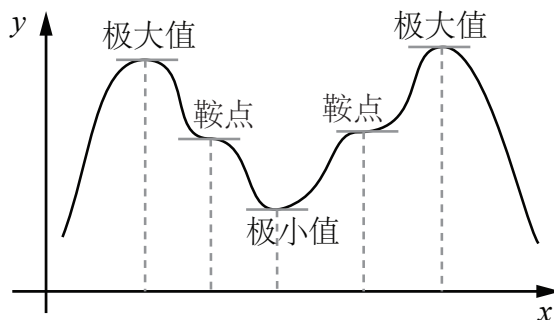


图 1: 导数为零的三种点

如图 1, 若一个一元函数 $y = f(x)$ 在某区间内处处可导 (即对区间内的任何 x 导数 $f'(x)$ 都存在), 若区间内存在某些 x_i 能使 $f'(x_i) = 0$ (即在这些点处函数曲线的斜率为零), 这样的点被称为驻点.

而从函数曲线来看, 驻点又分为三类: 极大值, 极小值, 鞍点. 我们以 x_i 为中心取一个小区间, 如果这个区间足够小, 那么容易看出对于极大值点, $f'(x)$ 在小区间内递减, 对于鞍点, $f'(x)$ 在小区间内恒为非负或恒为非正, 对于极小值点, $f'(x)$ 在小区间内递增. 所以为了判断驻点的类型, 我们可以在驻点处求函数的二阶导数 $f''(x_i)$. 假设二阶偏导存在, 如果 $f''(x_i) < 0$, 那么 x_i 是极大值点, 如果 $f''(x_i) > 0$, x_i 是极小值点. 要注意的是, 如果 $f''(x_i) = 0$, 不能直接判断 x_i 鞍点, 需要进一步分析: 例如我们可以判断驻点左边和右边的一阶导数符号, 如果同号则是驻点, 左正右负则是极大值, 左负右正则是极小值.

另外, 若某个极小值点是整个考察区间中函数值最小的点, 它就被称为**最小值点**, 若某个极大值点是该区间中函数值最大的点, 它就被称为**最大值点**.

例 1

二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的导函数为 $f'(x) = 2ax + b$, 所以唯一的驻点为 $-b/(2a)$. 函数的二阶导数是一个常数 $f''(x) = 2a$, 所以当 $a > 0$ 时驻点是唯一的极小值点, 即最小值点. 同理, 当 $a < 0$ 时驻点是最大值点.

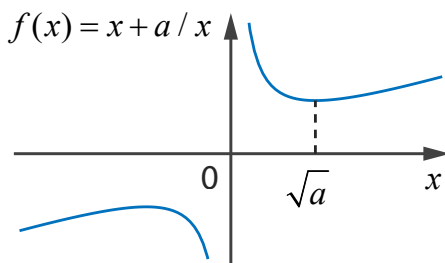


图 2: 例 2 函数图

例 2

函数 $f(x) = x + a/x$ ($a > 0$) 的一阶导函数为 $f'(x) = 1 - a/x^2$, 若我们只考察区间 $(0, +\infty)$, 唯一的驻点为 $x = \sqrt{a}$. 函数的二阶导函数 $f''(x) = 2a/x^3$ 在驻点处的值为 $2/\sqrt{a} > 0$, 所以该驻点为当前区间的最小值点 (图 2).

例 3

函数 $f(x) = x^3$ 的一阶导函数为 $f'(x) = 3x^2$, 唯一的驻点为 $x = 0$. 函数的二阶导函数 $f''(x) = 6x$ 在驻点处的值为 0. 由于 $f'(x)$ 在原点左侧和右侧都大于 0, 所以这是一个鞍点.

用极值点确定函数图像

预备知识 导数与函数的极值^[89]

许多时候, 我们可以通过函数极值点的位置以及种类确定函数的大致图像.

例 1

求以下函数的极值点，并判断该函数的大致图像

$$f(x) = a + \frac{b}{2}x^2 - \frac{c}{4}x^4 + \frac{d}{6}x^6 \quad (a, b, c, d > 0) \quad (1)$$

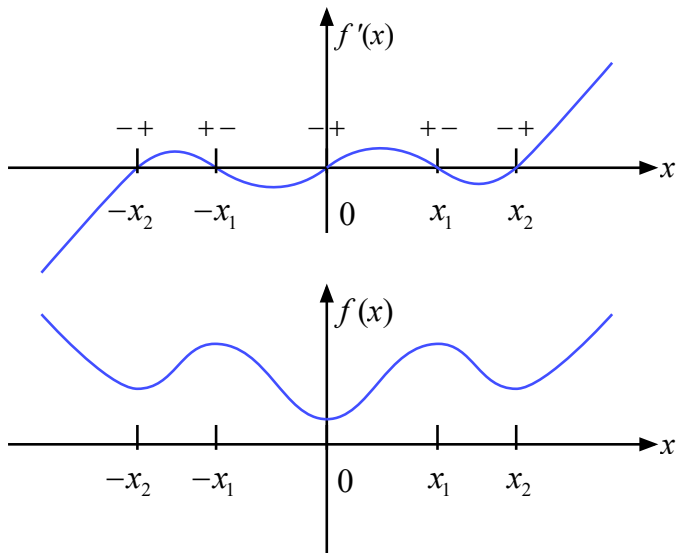


图 1: 导数 $f'(x)$ 与原函数 $f(x)$

先对函数求导，得

$$f'(x) = bx - cx^3 + dx^5 \quad (2)$$

这是一个 5 次多项式，最多可能有五个零点。但由于多项式只有奇数项，不难解出可能的根。

$$bx + cx^3 + dx^5 = x[b + c(x^2) + d(x^2)^2] \quad (3)$$

所以其中一个解是 $x = 0$ ，而 $b + c(x^2) + d(x^2)^2$ 是关于 x^2 的二次方程，当判别式 $\Delta = c^2 - 4bd$ 大于零时， x^2 存在两个大小不等的正根，姑且记为 x_1^2 和 x_2^2 ， $x_1 < x_2$ 。此时五个根分别为 $0, \pm x_1, \pm x_2$ 。

$$f'(x) = d \cdot x(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_1^2) = d \cdot x(x + x_1)(x - x_1)(x + x_1)(x - x_2) \quad (4)$$

由于 $d > 0$ ，可以大致画出 $f'(x)$ 图像如图 1（下）。

用二阶导数判断分类。若二阶导数为正，则是极小值，若为负，则是极大值，若为零，则是鞍点。

一元函数的微分

预备知识 导数^[78]

考察一个连续光滑的函数 $y = f(x)$ ，在 x 处函数值为 y ，若此时函数增加一个无穷小量 dx ，函数值会相应增加无穷小量 dy 。根据导数的定义^[78] $f'(x) = dy/dx$ ，我们将 dy 与 dx 的关系记为

$$dy = f'(x) dx \quad (1)$$

这就是一元函数的微分。注意一元函数的求导和微分除了表达方式不同外并无太大区别。从形式上来看，微分是微小变化量之间的线性关系，而导数则强调变化率。

微分近似

严格来说，类似式 1 的微分关系式默认取极限 $dx \rightarrow 0$ 才能使等号成立，但只要在一定范围 Δx 内导函数 $f'(x)$ 的变化非常小，就可以将函数值的变化量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 近似为

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \quad (2)$$

注意在近似式中不能出现微分符号 d ，也不能使用等号。

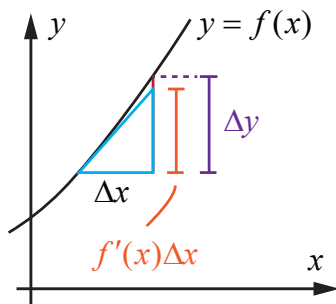


图 1: 微分近似用函数曲线的切线增量 $f'(x)\Delta x$ 来近似函数增量 Δy

例 1 测量误差

若测得立方体的边长为 a , 测量的最大可能误差为 σ_a (可以假设 $\sigma_a \ll a$), 估计立方体体积的最大误差 σ_V .

立方体的体积与边长的关系为 $V(a) = a^3$, 根据微分近似, 有

$$\sigma_V \approx V'(a)\sigma_a = 3a^2\sigma_a \quad (3)$$

例 2 细圆环的面积和薄球壳的体积

圆的面积关于其半径的函数为 $A(r) = \pi r^2$, 对该式进行微分得 $dA = 2\pi r dr$. 注意到 $2\pi r$ 为 r 对应的周长, 所以该微分式的意义就是, 半径为 r , 宽度为 dr 的圆环的面积等于该圆环的周长乘以圆环的宽度.

球的体积关于其半径的函数为 $V(r) = 4\pi r^3/3$, 求微分得 $dV = 4\pi r^2 dr$. 注意到 $4\pi r^2$ 为 r 对应的球表面积, 所以该微分式的意义是, 半径为 r , 厚度为 dr 的球壳的体积等于该球壳的表面积乘以球壳厚度.

复合函数求导 链式法则**预备知识 微分^[92]**

若有两个一元函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 我们可以把 g 的函数值作为 f 的自变量, 得到一个新的函数称为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的**复合函数**, 记为 $f[g(x)]$.

如果我们已知两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$, 那么我们可以通过以下公式求复合函数 $f[g(x)]$ 的导数.

$$f[g(x)]' = f'[g(x)]g'(x) \quad (1)$$

对于多个函数的复合函数, 我们也有类似的公式, 例如

$$f[g(h(x))]' = f'[g(h(x))]g'[h(x)]h'(x) \quad (2)$$

例 1 基本初等函数的复合函数求导

我们已经知道基本初等函数的导数^[84]的导函数, 下面对它们的一些常见的复合函数进行求导.

$\sin^2 x$ 可以看作幂函数 $f(x) = x^2$ 和 $g(x) = \sin x$ 的复合函数, 已知 $f'(x) = 2x$, $g'(x) = \cos x$, 代入式 1 得

$$(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x \quad (3)$$

几何理解

为了方便表示, 我们把 g 的函数值和 f 的自变量记为 u , 把 f 的函数值记为 y .

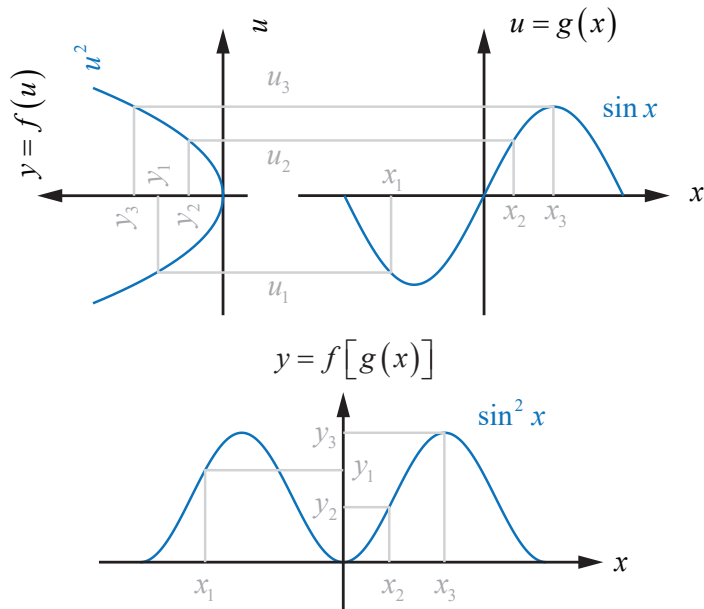


图 1: 可以将 $\sin^2 x$ 看做 $f(u) = u^2$ 和 $g(x) = \sin x$ 的复合函数

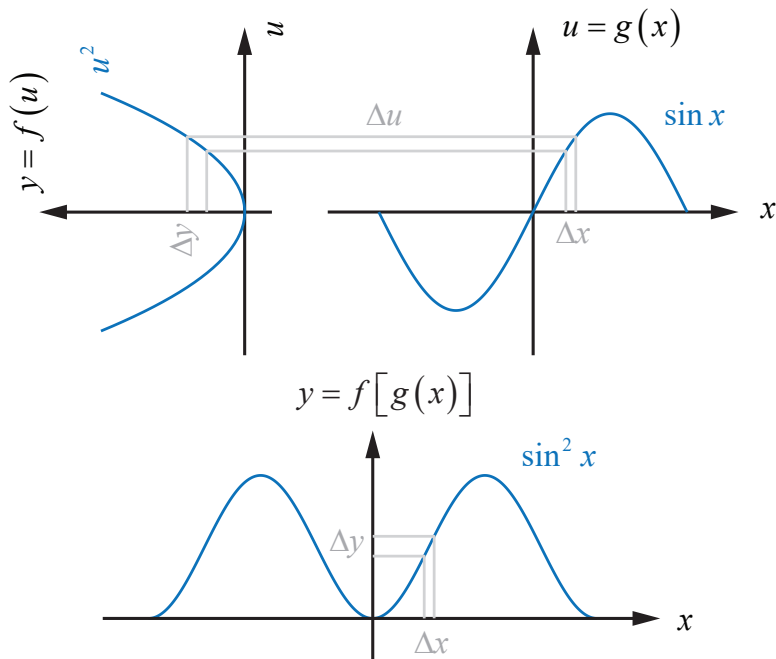
我们可以用类似图 1 的图像来直观地理解复合函数. 先画出 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 的图像, 并将 $g(x)$ 的图像逆时针旋转 90° 使得两图的 u 轴对齐. 这样对于任何定义域中的自变量 x , 我们只需要先在 $g(x)$ 的图中画出 u 的位置, 再对应到 $f(u)$ 的图像中求出 y 的位置即可.

现在我们要讨论的问题是, 若已知两函数的导函数 $f'(u)$ 和 $g'(x)$ (假设它们在定义域内处处可导) 如何求复合函数 $f[g(x)]$ 的导数.

对于给定的 x , 我们先来看当 x 增加 Δx 时 y 的增量 Δy 的大小. 我们可以使用与图 1 类似的方法画出图 2, 然后只需要令 $\Delta x \rightarrow 0$, 就可以根据定义求出复合函数的导数

$$f[g(x)]' = \frac{d}{dx} f[g(x)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (4)$$

在这个过程中, 我们在得到 Δy 之前先得到了 u 的增量 Δu . 当 Δx 较小

图 2: 用图 1 中的方法求出任意 Δx 对应的 Δy

时有微分近似 (式 2^[92])

$$\Delta u \approx g'(x)\Delta x \quad \Delta y \approx f'(u)\Delta u \quad (5)$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时对应的微分关系 (式 1^[92]) 为

$$du = g'(x) dx \quad dy = f'(u) du \quad (6)$$

将上式中的左边代入右边得

$$dy = f'(u)g'(x) dx = f'[g(x)]g'(x) dx \quad (7)$$

而复合函数的微分是

$$dy = f[g(x)]' dx \quad (8)$$

对比以上两式 (微分和导数的关系) 得

$$f[g(x)]' = f'[g(x)]g'(x) \quad (9)$$

这就是复合函数的求导公式.

在上面的例子中

$$g(x) = \sin x \quad g'(x) = \cos x \quad f(u) = u^2 \quad f'(u) = 2u \quad (10)$$

代入上式得

$$\frac{d}{dx} \sin^2 x = 2 \sin x \cos x \quad (11)$$

复合函数的求导公式也叫**链式法则**，原因是我们可以把以上推导过程用导数的另外一种符号表示如下。

$$dy = \frac{dy}{du} du = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} dx \quad (12)$$

得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \quad (13)$$

这种书写方式让人不禁想把 dy/dx 看做是 dy 和 dx 相除，这样的符号分割是错误的，尤其是在以后学习高阶导数和偏导数时。

多重复合函数

要对多重复合函数如 $f[g(h(x))]$ 求导，可以先对 $g[h(x)]$ 求导得 $g'[h(x)]h'(x)$ 再得到

$$f[g(h(x))]' = f'[g(h(x))]g'[h(x)]h'(x) \quad (14)$$

令 $v = h(x)$ ，用微分符号可以表示为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx} \quad (15)$$

任意多重的复合函数求导同理可得。

例 2 对函数求导

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (16)$$

首先令 $f(x) = 1/\sqrt{x}$ 再令 $g(x) = x^2 + a^2$ ，上式等于 $f[g(x)]$ 。由基本初等函数的导数^[84]，

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \quad g'(x) = 2x \quad (17)$$

代入式 9，得

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} = f'[g(x)]g'(x) = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}} \quad (18)$$

一种较灵活的情况是，当三个变量只有一个自由度³时，任何一个变量都可以看做任何另外两个变量的函数⁴，这时可以根据需要灵活运用链式法则，如例 3.

例 3 加速运动公式

假设质点做一维运动，位移，速度和加速度分别记为 $x(t)$ ， $v(t) = dx/dt$ ， $a(t) = dv/dt$ ，但若把速度 v 看做复合函数 $v[x(t)]$ ，根据链式法则有

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v \quad (19)$$

写成微分表达式，有 $a dx = v dv$. 注意到 $d(v^2) = 2v dv$ ，代入得

$$d(v^2) = 2a dx \quad (20)$$

若质点做匀加速运动，该式的物理意义是在任何一段微小时间内，速度平方的增量正比于这段时间内的位移增量. 在一段时间 $[t_1, t_2]$ 内把这些增量累加起来，就得到高中熟悉的运动学公式

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1) \quad (21)$$

其中 x_1, v_1 和 x_2, v_2 分别是 t_1, t_2 时刻的位置和速度.

曲率 曲率半径（平面）

预备知识 切线^[75]，极坐标系^[36]

⁵我们来看一个平面上的一个光滑曲线（即处处存在切线），我们如何描述它某点处的弯曲程度呢？一种常用方法是在这点附近取曲线的一小段，然后做一个尽量与它吻合的圆，当这小段的长度趋近于 0 时，这个圆可以唯一确定. 我们把这个圆叫做密切圆（**osculating circle**），把密切圆的半径叫做曲线在该点的曲率半径（**radius of curvature**），曲率半径的倒数 $1/R$ 叫做曲率（**curvature**）.

³即任何一个变量值确定后，另外两个变量也随之确定

⁴姑且假设不会出现一个自变量对应两个函数值的情况

⁵参考 Wikipedia [相关页面](#)

我们先来看一个半径为 R 的圆的一小段圆弧, 令其长度为 Δl . 作这段圆弧两端的切线, 令它们的夹角为 $\Delta\theta$, 那么显然满足 $R\Delta\theta = \Delta l$. 同理, 对于任意光滑曲线上长度为 Δl 的一段, 我们也可以做相同的方法定义曲率半径 R , 但需要令 $\Delta l \rightarrow 0$

$$R = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta\theta} \quad (1)$$

曲率的具体计算公式取决于使用什么方式定义曲线, 最常见描述方式就是在直角坐标系中通过函数 $y(x)$ 来定义, 点 (x, y) 处的曲率半径为 (\dot{y}, \ddot{y} 分别表示导数和二阶导数)

$$R = \frac{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\ddot{y}} \quad (2)$$

如果通过极坐标^[36] 函数 $r(\theta)$ 定义曲线, 则点 (r, θ) 处的曲率半径为

$$R = \frac{(r^2 + \dot{r}^2)^{3/2}}{r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}} \quad (3)$$

直角坐标系的推导

预备知识 高阶导数^[87], 一元函数的微分^[92]

平面上曲线的最常见描述方式就是通过定义函数 $y(x)$. 我们可以通过导数^[78] 计算曲线上某点切线关于 x 轴的夹角 θ .

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \tan \theta \quad (4)$$

曲线长度的微分为

$$dl = \frac{dx}{\cos \theta} \quad (5)$$

其中

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \quad (6)$$

为了得到 $d\theta$, 我们对式 4 两边做微分得

$$\ddot{y} dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (7)$$

所以曲率半径为

$$R = \frac{dl}{d\theta} = \frac{1}{\ddot{y} \cos^3 \theta} = \frac{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\ddot{y}} \quad (8)$$

极坐标系的推导

极坐标系中，同样可以用函数 $r(\theta)$ 描述曲线。令

$$\frac{dr}{r d\theta} = \tan \alpha \quad (9)$$

即

$$\dot{r} = r \tan \alpha \quad (10)$$

长度微分为

$$dl = \frac{r d\theta}{\cos \alpha} \quad (11)$$

微分

$$\ddot{r} d\theta = \dot{r} \tan \alpha d\theta + \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha \quad (12)$$

即

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = (\ddot{r} - \dot{r} \tan \alpha) \frac{\cos^2 \alpha}{r} = \frac{\ddot{r} - \dot{r} \tan \alpha}{r(t + \tan^2 \alpha)} \quad (13)$$

注意切线方向的微分是 $d\theta - d\alpha$ 。所以

$$R = \frac{dl}{d\theta - d\alpha} = \frac{dl / d\theta}{1 - d\alpha / d\theta} \quad (14)$$

把式 1 和式 13 代入，再使用式 10 消去 α 得

$$R = \frac{(r^2 + \dot{r}^2)^{3/2}}{r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}} \quad (15)$$

导数与差分

预备知识 泰勒展开^[78]

一阶导数

我们在导数的定义^[78] 中已经知道⁶

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h/2) - f(x - h/2)}{h} \quad (1)$$

⁶以下假设 $f(x)$ 在某区间内处处可导。

在一些应用（如数值计算）中，我们只能把 h 取一个很小的数值（如 10^{-10} ）而并非无穷小，这就需要我们估计用上式右边的差分来代替 $f'(x)$ 有多精确。为了估算误差，我们可以将 $f(x \pm h/2)$ 展开为关于 h 的泰勒级数

$$f(x \pm h/2) = f(x) \pm f'(x)\frac{h}{2} + \frac{1}{2}f''(x)\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \mathcal{O}(h^3) \quad (2)$$

代入式 1 得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x)h + \mathcal{O}(h^3)}{h} = f'(x) + \mathcal{O}(h^2) \quad (3)$$

所以用差分代替一阶导数可以精确到 h 的二阶无穷小 $\mathcal{O}(h^2)$ 。

二阶导数

能否用类似的方法来表示二阶导数呢？根据二阶导数的定义，我们需要用双重极限来表示

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f'(x+l/2) - f'(x-l/2)}{l} \\ &= \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{lh} [f(x+l/2+h/2) - f(x+l/2-h/2) \\ &\quad - f(x-l/2+h/2) + f(x-l/2-h/2)] \end{aligned} \quad (4)$$

但我们希望只用一个极限来表示二阶导数。然而我们不确定 h 是否需要是 l 的高阶无穷小。我们不妨来试试令 $l = h$ ，即

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad (5)$$

要验证该式成立与否，将 $f(x \pm h)$ 关于 h 做泰勒展开得

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 \pm \frac{1}{6}f'''(x)h^3 + \mathcal{O}(h^4) \quad (6)$$

代入式 5 右边得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x)h^2 + \mathcal{O}(h^4)}{h^2} = f''(x) + \mathcal{O}(h^2) \quad (7)$$

这就验证了式 5 的正确性。另外我们得知用差分来近似二阶导数 $f''(x)$ 同样是精确到二阶无穷小 $\mathcal{O}(h^2)$ 。

不定积分

预备知识 基本初等函数的导数^[84]

一个实数函数 $f(x)$ 的**不定积分 (indefinite integral)** 是另一个函数 $F(x)$, 叫做 $f(x)$ 的**原函数 (primitive function)**. 不定积分记为

$$F(x) = \int f(x) dx \quad (1)$$

注意积分符号 \int 和 dx 是一个整体算符, 作用在他们中间的函数上⁷.

不定积分被定义为**求导的逆运算**. 即若能找到 $F(x)$ 使其导数为 $f(x)$, 那么 $F(x)$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数.

$$F'(x) = f(x) \quad (2)$$

给出一个 $f(x)$, 可以找到许多不同的原函数, 且这些原函数都只相差一个常数. 也就是说, 给 $f(x)$ 的任意一个原函数加上一个常数 C , 就可以得到 $f(x)$ 的另一个原函数. C 叫做**积分常数 (constant of integration)**.

证明: 由于常数导数^[78]为 0, 给原函数加上常数后式 2 仍然成立

$$\frac{d}{dx}[F(x) + C] = f(x) \quad (3)$$

我们可以从几何上来理解该式: 将函数曲线 $y = F(x)$ 整体在 y 方向平移并不影响某个 x 坐标处函数曲线的斜率.

不定积分的基本性质

由于求导是线性运算, 不定积分也是线性运算. 即若干函数的线性组合的积分等于分别对这些函数积分再线性组合. 令 a_n 为常数, 有

$$\int [a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \dots] dx = a_1 \int f_1(x) dx + a_2 \int f_2(x) dx \dots \quad (4)$$

⁷有时候为了方便也会记为 $\int dx f(x)$

不定积分计算方法

与求导不同，计算不定积分没有特定的步骤，这里介绍几种方法

1. 最简单直接的方法是把已知的各种常见函数的导数写成积分的形式，例如已知 $\sin x$ 的导数是 $\cos x$ ， $\cos x$ 的积分就是 $\sin x$ 加任意常数.
2. 换元积分法^[102]，包括第一类换元法和第二类换元法.
3. 分部积分法^[104]
4. 查表法. 许多高等数学教材（包括本书）都会给出一个积分表. 当然，在信息技术发达的今天这种方法几乎已经被计算软件和网站取代.
5. 计算软件和网站. 常见的符号计算软件有 Mathematica，Maple 等，数学网站有 Wolfram Alpha 等（建议先把积分技巧练熟再使用这些方法）. 其中 Wolfram Alpha 对许多积分还会给出详细的计算步骤.

对于一些常用积分，一般要求能熟记或快速推出. 见积分表^[106]中的常用积分部分.

换元积分法

预备知识 不定积分^[101]，复合函数求导^[93]

第一类换元积分法

由复合函数的求导法则，令 $F'(x) = f(x)$ ，则

$$\frac{d}{dx}F[u(x)] = f[u(x)]u'(x) \quad (1)$$

由于求导的逆运算是积分，有

$$\int f[u(x)]u'(x) dx = F[u(x)] + C \quad (2)$$

所以如果某个积分可以看成 $\int f[u(x)]u'(x) dx$ 的形式, 且 $F(x)$ 较容易求出, 即可根据式 2 写出结果. 这种方法叫做**第一类换元积分法**. 这类换元积分法的技巧就在于如何看出被积函数的结构是 $\int f[u(x)]u'(x) dx$, 只有多练习才能熟能生巧.

例 1

计算

$$\int a \sin(ax + b) dx \quad (3)$$

令 $f(x) = \sin(x)$, $u(x) = ax + b$, 则上式刚好是 $\int f[u(x)]u'(x) dx$ 的形式. 从基本初等函数积分表已知 $\sin x$ 的一个原函数是 $F(x) = -\cos x$, 那么答案就是

$$F[u(x)] + C = -\cos(ax + b) + C \quad (4)$$

总结到更一般的情况, 根据换元积分法, 若已知 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 则对于任意常数 a 和 b , 必有 $\int a f(ax + b) dx = F(ax + b)$. 根据积分的基本性质, 两边同除 a , 得

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C \quad (5)$$

该式使用频率很高, 需要熟练掌握. 类似例子还有

$$\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax + b) + C \quad \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C \quad (6)$$

等等.

积分变量替换

换元积分法的过程在形式上可以记为 (见微分^[92])

$$\begin{aligned} \int f[u(x)]u'(x) dx &= \int f[u(x)] d[u(x)] = \int f(u) du = F(u) + C \\ &= F[u(x)] + C \end{aligned} \quad (7)$$

该式把积分变量由 x 换成了 u , 故称为**换元积分法**.

第二类换元积分法

第二类换元积分法从某种意义上和第一类换元积分相反. 若要对一个函数积分, 先把它的自变量看做另一个变量的函数, 再逆向使用式 7, 即可化简积分.

$$\int f(x) dx = \int f[x(t)] d[x(t)] = \int f[x(t)]x'(t) dt \quad (8)$$

这个积分看似复杂了, 但是如果 $x(t)$ 选取适当, 反而可以使计算化简.

例 2

计算

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (9)$$

显然 $x \in (-1, 1)$, 选取 $x(t) = \sin t$. 替换后的定义域为 $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, 函数单调递增⁸. 上面积分变为

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d \sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int \frac{\cos t dt}{\cos t} = \int 1 dt = t + C = \arcsin x + C \quad (10)$$

验证: 根据反函数求导法则^[82]

$$\arcsin' x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (11)$$

分部积分法

预备知识 牛顿—莱布尼兹公式^[115]

若积分中的被积函数可以表示为两个函数的乘积, 则我们可以使用分部积分公式, $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别为 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的导函数, 有

$$\int F(x)g(x) dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x) dx \quad (1)$$

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = F(x)G(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)G(x) dx \quad (2)$$

⁸注意任何积分换元法中的两个变量必须有一一对应的关系, 即相互的函数关系在定义域内都为单调.

用 $f^{(n)}(x)$ 表示 n 阶导数, $f^{[n]}(x)$ 表示 n 次不定积分⁹, 连续使用 n 次分部积分公式, 有

$$\int f(x)g(x) dx = f(x)g^{[1]}(x) - f^{(1)}(x)g^{[2]}(x) + \cdots + (-1)^{n-1}f^{(n-1)}(x)g^{[n]}(x) + (-1)^n \int f^{(n)}(x)g^{[n]}(x) dx \quad (3)$$

推导

令 $f(x) = F'(x)$, $g(x) = G'(x)$, 根据乘法的求导公式

$$[F(x)G(x)]' = f(x)G(x) + F(x)g(x) \quad (4)$$

即

$$F(x)g(x) = [F(x)G(x)]' - f(x)G(x) \quad (5)$$

两边不定积分 (积分常数可任取) 得

$$\int F(x)g(x) dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x) dx \quad (6)$$

所以如果被积函数等于两个函数的乘积, 则可选择其中一个 (F) 为“求导项”进行求导, 另一个 (g) 为“积分项”进行不定积分 (积分常数可任取), 然后代入该式即可.

若要计算定积分, 既可以先计算不定积分然后使用牛顿—莱布尼兹公式, 也可以直接对式 5 进行定积分得

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f(x)G(x) dx \quad (7)$$

例 1 求 xe^{-x} 的不定积分和从 0 到 $+\infty$ 的定积分

令 x 项为“求导项”, 导数为 1, e^{-x} 为“积分项”, 积分为 $-e^{-x}$. 代入式 6 得

$$\int xe^{-x} dx = x(-e^{-x}) - \int 1 \times (-e^{-x}) dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C \quad (8)$$

如果直接计算定积分, 把“求导项”和“积分项”直接代入式 7 得

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = x(-e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \times (-e^{-x}) dx = 0 - e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1 \quad (9)$$

⁹这是笔者自己发明的符号

多次分部积分

由于 $f(x)$ 的 n 次导数可以记为 $f^{(n)}(x)$, 不妨把 $g(x)$ 的 n 次不定积分 (n 个积分常数任取) 记为 $g^{[n]}(x)$. 则分部积分式 6 可记为

$$\int f(x)g(x) dx = f(x)g^{[1]}(x) - \int f^{(1)}(x)g^{[1]}(x) dx \quad (10)$$

再对第二项利用分部积分, 仍然将 $f^{(1)}$ 作为“求导项”, $g^{[1]}$ 作为“积分项”, 得

$$\int f(x)g(x) dx = f(x)g^{[1]}(x) - f^{(1)}(x)g^{[2]}(x) + \int f^{(2)}(x)g^{[2]}(x) dx \quad (11)$$

再把 $f^{(2)}$ 作为“求导项”, $g^{[2]}$ 作为“积分项”, 分布积分得

$$\begin{aligned} \int f(x)g(x) dx &= f(x)g^{[1]}(x) - f^{(1)}(x)g^{[2]}(x) + f^{(2)}(x)g^{[3]}(x) \\ &\quad - \int f^{(3)}(x)g^{[3]}(x) dx \end{aligned} \quad (12)$$

可以发现若要使用 N 次分部积分, 第 $i \leq N$ 项等于第 $i-1$ 项中的“求导项”求导, “积分项”积分, 再取相反数, 最后不定积分中只需把“求导项”额外求一次导即可.

积分表

预备知识 不定积分^[101]

这里给出一个基本积分表和一个常用积分表, 前者建议熟记. 部分积分有的给出计算步骤, 没有给出则是由基本初等函数的导数^[84]直接逆向得出. 所有的不定积分公式都可以通过求导验证.

应用换元积分法^[102], 表中任何积分都可以拓展为

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (1)$$

基本积分表

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \quad (a \in \mathbb{R}, a \neq -1) \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (\text{例 6}) \quad (3)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (4)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (5)$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C \quad (\text{例 2}) \quad (6)$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C \quad (\text{例 3}) \quad (7)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \quad (9)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (10)$$

$$\int xe^x dx = e^x(x-1) + C \quad (\text{例 7}) \quad (11)$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (\text{例 1}) \quad (12)$$

常用积分表

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C \quad (\text{例 4}) \quad (13)$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C \quad (\text{例 5}) \quad (14)$$

$$\int \sec x dx = \ln|\tan x + \sec x| + C \quad (\text{例 11}) \quad (15)$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C \quad (\text{例 8}) \quad (16)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C \quad (\text{例 9}) \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C \quad (\text{例 10}) \quad (18)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C = \sinh^{-1} x + C \quad (\text{例 12}) \quad (19)$$

例 1

$$\int a^x dx \quad (20)$$

我们已经知道如何算 e^x 的积分, 而 $a = e^{\ln a}$, 再根据式 1 就有

$$\int e^{\ln(a)x} dx = \frac{1}{\ln a} e^{\ln(a)x} + C = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (21)$$

例 2

$$\int \tan x dx \quad (22)$$

这个积分用第一类换元积分法 (式 2^[102])

$$\int f[u(x)]u'(x) dx = F[u(x)] + C \quad (23)$$

首先 $\tan x = \sin x / \cos x$, 令 $u(x) = \cos x$, 则 $\sin x = -u'(x)$, 对比得 $f(x) = -1/x$ 其原函数为 $F(x) = -\ln|x|$, 所以

$$\int \tan x dx = \int f[u(x)]u'(x) dx = F[u(x)] + C = -\ln|\cos x| + C \quad (24)$$

例 3

类似例 2, $\cot x = \cos x / \sin x$, 令 $u(x) = \sin x$, 则 $\cos x = u'(x)$, 对比得 $f(x) = 1/x$, 原函数为 $F(x) = \ln|x|$ (式 3), 所以

$$\int \cot x dx = F[u(x)] + C = \ln|\sin x| + C \quad (25)$$

例 4

$$\int \sin^2 x dx \quad (26)$$

用降幂公式 (式 7^[30]) 和不定积分的线性 (式 4^[101]) 把上式变为常数的积分和 $\cos 2x$ 的积分, 再利用式 4 和式 1 计算后者即可

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C \end{aligned} \quad (27)$$

例 5

$$\int \cos^2 x \, dx \quad (28)$$

与例 4 类似, 用三角恒等式 $\cos^2(x) = [1 + \cos(2x)]/2$ 得

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2} \, dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C \end{aligned} \quad (29)$$

例 6

$$\int \frac{1}{x} \, dx \quad (30)$$

首先在区间 $(0, +\infty)$ 内, 由于 $\ln x$ 的导数是 $1/x$, 所以积分结果为 $\ln x + C$. 现在再来考虑区间 $(-\infty, 0)$, 注意 $\ln x$ 在这里没有定义, 不妨看看 $\ln(-x)$, 由复合函数求导, 其导数恰好为 $1/x$. 所以在除去原点的实数范围内, 有

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \quad (31)$$

事实上, 由于 $1/x$ 在 $x=0$ 没有定义, 更广义的原函数可以取

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \begin{cases} \ln x + C_1 & (x > 0) \\ \ln(-x) + C_2 & (x < 0) \end{cases} \quad (32)$$

其中 C_1 和 C_2 是两个不相同的待定常数.

例 7

$$\int x e^x \, dx \quad (33)$$

使用分部积分式 1^[104]

$$\int F(x)g(x) \, dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x) \, dx \quad (34)$$

令 $F(x) = x$, 求导得 $f(x) = 1$, 令 $g(x) = e^x$, 由式 10, $G(x) = e^x$. 代入分部积分得

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = e^x(x - 1) + C \quad (35)$$

例 8

$$\int \ln x \, dx \quad (36)$$

方法一：使用第二类换元法式 8^[102]

$$\int f(x) \, dx = \int f[x(t)] \, d[x(t)] = \int f[x(t)]x'(t) \, dt \quad (37)$$

令¹⁰ $x = e^t$ ，求导得 $x'(t) = e^t$ ，换元得

$$\int \ln x \, dx = \int \ln(e^t)e^t \, dt = \int te^t \, dt \quad (38)$$

由例 7 中的分部积分得

$$\int \ln x \, dx = e^t(t-1) + C = e^{\ln x}(\ln x - 1) + C = x(\ln x - 1) + C \quad (39)$$

方法二：直接使用分部积分法式 1^[104]，对常数 1 积分，对 $\ln x$ 求导，得

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C \quad (40)$$

例 9

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \quad (41)$$

使用第二类换元法式 8^[102]，令 $x = a \sin t$ 得

$$\int a \cos t \, d(a \sin t) = a^2 \int \cos^2 t \, dt \quad (42)$$

将例 5 的结论代入得 $a^2(t + \sin t \cos t) + C$ ，再将 $t = \arcsin(x/a)$ 代入得

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C \quad (43)$$

例 10

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \quad (44)$$

使用第二类换元法式 8^[102]，令 $x = \sin t$ 得

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \, d(\sin t) = \int dt = t + C = \arcsin x + C \quad (45)$$

¹⁰注意被积函数只在 $x > 0$ 区间有定义，否则使用 $x = e^t$ 将会自动忽略 $x \leq 0$ 的情况。

例 11

$$\int \sec x \, dx \quad (46)$$

分子分母同时乘以 $\sec x + \tan x$, 可以发现分子是分母的导数. 再用第一类换元积分法 (式 2^[102]), 令 $u(x) = \sec x + \tan x$, 再使用式 3 即可

$$\begin{aligned} \int \sec x \, dx &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx = \int \frac{u'(x)}{u} \, dx = \int \frac{1}{u} \, du \\ &= \ln |u| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C \end{aligned} \quad (47)$$

例 12

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx \quad (48)$$

使用第二类换元法式 8^[102], 令 $x = \tan t$, 再利用“三角恒等式^[30]”的式 2 和式 3 得

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}} \, d(\tan t) = \int \frac{1}{\sec t} \sec^2 t \, dt = \ln |\tan t + \sec t| + C \quad (49)$$

由同一三角恒等式, $\sec t = \sqrt{1+\tan^2 t} = \sqrt{1+x^2}$, 所以

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C \quad (50)$$

注意上式中 \ln 后面的绝对值符号消失是因为 $x + \sqrt{1+x^2} \geq 0$ 恒成立. 另外由“双曲函数^[31]”中例 1 可知上式又等于 $\sinh^{-1} x + C$.

定积分

预备知识 导数^[78]

首先以不均匀细绳的质量为例, 引入定积分的思想

例 1 不均匀细绳的质量

一条密度不均匀的绳子长为 L , 横截面积是 S , 细绳距离 O 端 $x(x < L)$ 处的密度为 $\rho(x)$. 求绳子的质量.

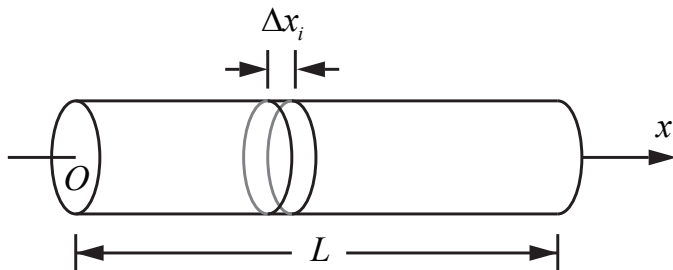


图 1: 密度不均匀的绳子

如果题目中, 密度是恒定的, 那么直接可以写出绳子的质量为 $m = LS\rho$. 但是题中 $\rho(x)$ 是关于 x 的函数, 所以我们要寻找另外的做法. 假设绳子的密度变化是连续且“平滑”的, 我们可以通过把绳子分割成 n 小节 (注意这些小节必须严格地首尾相接, 不能有重合或者空隙). 第 i 节取 x_i 到 x_{i+1} , 令其长度为 $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$ 使每一个小节内, 密度可以近似看成是恒定的, 这样我们可以用 $\rho(\xi_i)$ ($x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$) 来代替第 i 节的密度, 当每一节足够小时, 可以认为 ξ_i 在 $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ 约束下的取值并不会影响结果. 第 i 小节的质量为

$$\Delta m_i = \rho(\xi_i) \Delta x_i S \quad (1)$$

所以总的质量用求和符号来表示, 就是

$$m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) \Delta x_i S = S \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) \Delta x_i \quad (2)$$

由于当 n 取有限值时, 上式并不精确成立, 所以只能使用约等号, 但是 n 越大, 约等号两边就越精确成立. 这是极限的思想, 用极限符号来表, 就是

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta m_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) \Delta x_i S = S \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) \Delta x_i \quad (3)$$

这种表达式在物理中反复出现, 所以使用积分符号 \int 用于代替极限和求和符号. 另外把 ξ_i 写成 x (当 n 趋近于无穷大时, 参量 i 和 Δx_i 具体是多少就不重要了), 把表示增量的 Δ 变为表示微分的 d , 上式就写为

$$m = \int dm = \int S\rho(x) dx = S \int \rho(x) dx \quad (4)$$

下面先看看 $\int \rho(x) dx$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) \Delta x_i$ 的另一种理解. 画出 $\rho(x)$ 图像. 例如 $\rho(x) = x + 1$, 则 $\rho(\xi_i) \Delta x_i$ 可以表示左图的第 i 个小长方形的面积, $\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) \Delta x_i$

表示长方形面积之和. 如果 n 非常大且每个 Δx_i 取得非常小, 左图看起来就会像右图. 所以 $\int \rho(x) dx$ 可以用来表示右图阴影部分的面积.

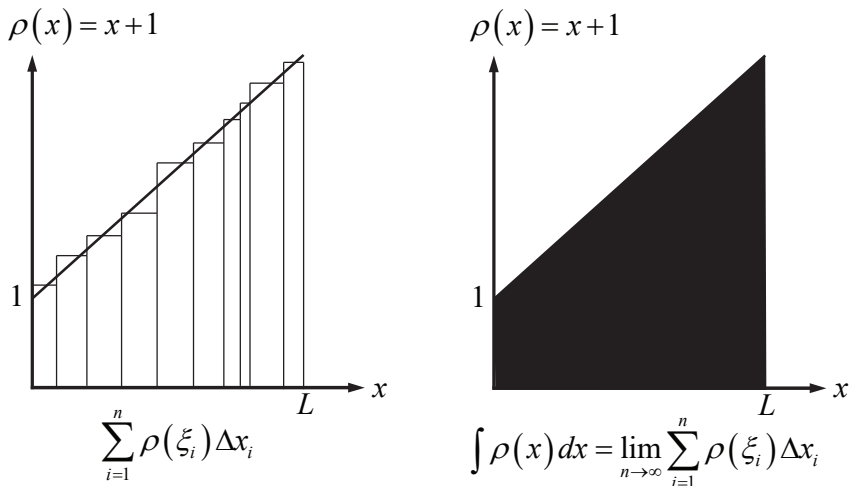


图 2: 定积分可以理解为曲线下面的面积, 并看做由无限多个无穷窄的矩形组成.

但 $\int \rho(x) dx$ 里面显然不包含 0 和 L 的信息, 我们根据题目中的情况, 说这个积分是“从 0 积到 L ”, 其中 0 是积分下限, L 是积分上限. 为了表示这个信息, 把它写到积分号右边变为

$$\int_0^L \rho(x) dx \quad (5)$$

这就是定积分的标准形式, 但有时候为了书写方便, 在不混淆的情况下可以把积分上下限省略.

这样的写法是很形象的, 可以想象, 积分号就是函数的曲线需要积分的部分, 下标的位置代表曲线的起点, 上标代表曲线的终点. 这样, 物理中很多问题就可以用积分表示了.

要注意的是, 根据上面积分的定义, 如果曲线在 x 轴的下方, 面积应该表示成负值. 但根据例 1 的物理情景, 可知密度不可能是负值.

至于计算积分的具体方法, 比求导要复杂得多, 甚至很多积分的结果不能用初等函数表示, 只能表示为级数等形式. 然而对于基本初等函数的积分, 用牛顿—莱布尼兹公式^[115]即可马上求解.

例 2 求圆的面积

在直角坐标系中，圆的方程为 $x^2 + y^2 = R^2$ ，上半圆的方程可看做 y 关于 x 的函数

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \quad (x \in [-R, R]) \quad (6)$$

将该式定积分再乘以 2 即可得到圆的面积

$$S = 2 \int_{-R}^R f(x) dx = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \quad (7)$$

我们还可以用另一种方法验证圆的面积公式。把原划分成许多微小圆环，由例 2^[92]，每个微小圆环的面积为 $2\pi r dr$ ，所以圆的面积可以用定积分表示为

$$S = \int_0^R 2\pi r dr \quad (8)$$

以上两个定积分的结果都为 πR^2 ，过程见“牛顿—莱布尼兹公式^[115]”的例 2。

例 3 球体的表面积

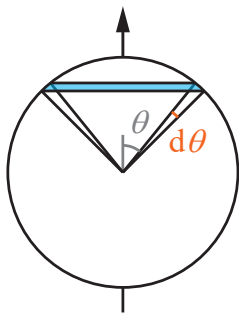


图 3: 将球体的表面划分成许多细圆环，每个对应的极角为 $d\theta$

以球心为原点建立球坐标系，我们可以把球体的表面根据不同的 θ 划分成许多细圆环（如图 3），每个圆环的面积等于周长乘以宽度，即

$$dS = 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta \quad (9)$$

所以球的表面积可以用定积分记为

$$S = \int_0^\pi 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \quad (10)$$

虽然我们还会不会计算这个定积分（见“牛顿—莱布尼兹公式^[115]”），但我们现在可以用一种巧妙的方法来简化问题。让我们来计算每个细圆环在极轴方向投影的长度。我们不妨把极轴叫做 z 轴，则对某个细圆环有 $z = R \cos \theta$ ，微分得 $dz = -R \sin \theta d\theta$ ，将该式消去式 9 中的 $d\theta$ 得

$$dS = -2\pi R dz \quad (11)$$

这说明无论细圆环的位置如何，其面积与其在 z 轴投影的长度的比值恒为 2π 。至于上式中的负号，是因为我们假设了正的 $d\theta$ 对应正的面积，而正的 $d\theta$ 却对应负的 dz 。由于面积恒为正值，我们可以取绝对值将负号去掉。这样，球的表面积就可以用定积分表示为

$$S = \int_{-R}^R 2\pi R dz \quad (12)$$

由于被积函数是一个常数，定积分的结果就是该常数乘以积分区间的长度即 $4\pi R^2$ 。

例 4 球的体积

要计算一个半径为 R 的球体的体积，可以将球划分为无限个薄球壳，每个薄球壳的体积等于该球壳的表面积乘以厚度（见例 2^[92]），即 $dV = 4\pi r^2 dr$ 。所以球的体积可用定积分表示为

$$V = \int_0^R 4\pi r^2 dr \quad (13)$$

同样由“牛顿—莱布尼兹公式^[115]”可得积分结果为 $4\pi R^3/3$ 。

牛顿—莱布尼兹公式

预备知识 不定积分^[101]，定积分^[111]

牛顿—莱布尼兹公式描述了定积分和不定积分的关系。我们已知不定积分是求导的逆运算，而定积分是函数曲线与 x 轴之间的面积，二者乍看起来没什么联系，但牛顿—莱布尼兹公式却揭示了二者之间的重要关系。

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数^[101]，则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (1)$$

推导

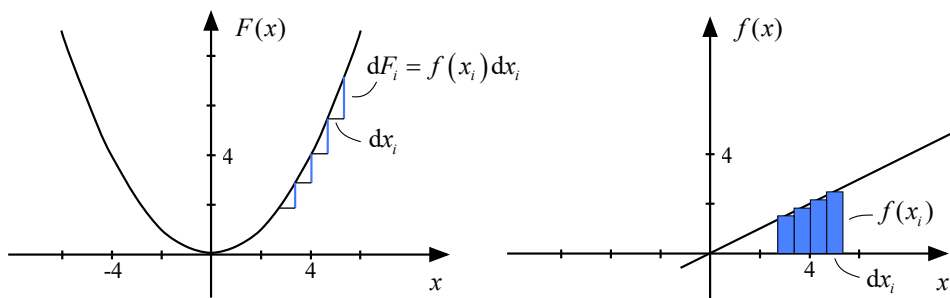


图 1: 右图中 $f(x)$ 的原函数为左图中的 $F(x)$, 当步长趋近 0 时, 右图中的长方形面积趋近于左图中小竖线的长度.

如图 1, 根据定积分^[111]的定义, 有¹¹

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i f(x_i) \Delta x_i \quad (2)$$

其中 $f(x_i) \Delta x_i$ 可看成是右图中第 i 个小矩形的面积, 求和是对从 a 到 b 的所有小矩形求和. 现在不妨把 x_i 设为第 i 个小矩形左端的 x 坐标. 考虑到求导是不定积分的逆运算, 有 $f(x_i) = F'(x_i)$, 所以小矩形的面积变为

$$f(x_i) \Delta x_i = F'(x_i) \Delta x_i \approx \Delta F_i = F(x_{i+1}) - F(x_i) \quad (3)$$

最后一步使用了微分近似. 该式可以理解成, 右图中的小矩形面积约等于左图中的小竖线长度, 即原函数 $F(x)$ 在 x_i 到 x_{i+1} 间的增量. 当取极限 $\Delta x_i \rightarrow 0$ 时, 上式取等号. 代回式 1, 有

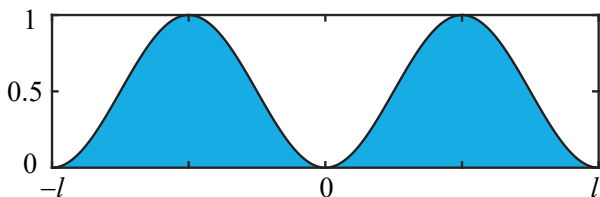
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i [F(x_{i+1}) - F(x_i)] = F(b) - F(a) \quad (4)$$

该式可理解为, 如果把左图中每一段 Δx_i 所对应的微小增量 ΔF_i 都加起来, 再取极限 $\Delta x_i \rightarrow 0$, 就是 $F(x)$ 从 a 到 b 的总增量. 在计算定积分的过程中, 为了书写简洁, 我们往往将上式中的 $F(b) - F(a)$ 记为 $F(x)|_a^b$.

¹¹这里假设极限存在.

例 1 计算定积分

$$\int_{-l}^l \sin^2\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \quad (5)$$

图 2: $y = \sin^2(\pi x/l)$ 的定积分

先计算对应的不定积分. 由积分表^[106]中的式 13 结合式 1 得不定积分为

$$\int \sin^2\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx = \frac{l}{2n\pi} \left[\frac{n\pi}{l}x - \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right] \quad (6)$$

再利用牛顿—莱布尼兹公式求定积分结果为 1. 计算该定积分还有另一种更简单的几何方法 (见图 2), 由于被积函数的对称性, 函数曲线可将区间 $[-l, l]$ 内高为 1 的长方形 (面积为 $2l$) 划分成等面积的上下两部分, 曲线下方的面积 l 就是定积分的结果.

例 2 圆的面积

现在我们可以用例 2^[111]中列出的两个定积分计算圆的面积. 先看第一个定积分, 由积分表式 17 得

$$\int \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \arcsin \frac{x}{R} \right) + C \quad (7)$$

由牛顿—莱布尼兹公式, $-R$ 到 R 的定积分为 $\pi R^2/2$, 所以圆的面积为 πR^2 .

第二个定积分要简单得多, 由幂函数的积分式 2^[106]和牛顿—莱布尼兹公式得

$$\int_0^R 2\pi r dr = \pi r^2 \Big|_0^R = \pi R^2 \quad (8)$$

例 3 球壳与球盖的面积

现在我们可以直接求例 3^[111]中的积分

$$S = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = 4\pi R^2 \quad (9)$$

我们还可以将积分上下限任意改变，得到球面上一个环形曲面的面积

$$S = 2\pi R^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta \, d\theta = 2\pi R^2 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (10)$$

当 $\theta_1 = 0$ 且 $\theta_2 = \alpha$ 时，我们就得到了球盖的面积

$$S = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha) \quad (11)$$

对定积分上下限求导

有时候我们会需要对定积分的上下限求导，例如

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \, dt \quad (12)$$

我们可以先对定积分用牛顿莱布尼兹公式，令原函数为 $F(x)$ ，有

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \, dt = \frac{d}{dx} [F(x) - F(a)] = f(x) \quad (13)$$

类似地，对积分下限求导如

$$\frac{d}{dx} \int_x^a f(t) \, dt = \frac{d}{dx} [F(a) - F(x)] = -f(x) \quad (14)$$

或者对上下限同时求导如

$$\frac{d}{dx} \int_{-x}^x f(t) \, dt = \frac{d}{dx} [F(x) - F(-x)] = f(x) + f(-x) \quad (15)$$

幂级数

预备知识 泰勒级数^[?]

在复数域上，形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (1)$$

的级数称为**幂级数 (power series)**，这里 c_n 皆为复数，未定元 z 一般也视为复数。

幂级数的收敛域

定理 1

如果由式 1 给出的幂级数在某点 $z_0 \neq a$ 处收敛, 那么它一定在开圆盘 $|z - a| < |z_0 - a|$ 上绝对收敛且内闭一致收敛.

证明很简单: 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在 $z = z_0$ 时收敛, 那么 $c_n(z_0 - a)^n \rightarrow 0$, 从而有一 M 使得 $|c_n(z_0 - a)^n| \leq M$ 对任何 n 都成立. 故对于任何固定的 $0 < q < 1$, 当 $|z - a| < q|z_0 - a|$ 时就有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z-a)^n| &= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z_0-a)^n| \frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n} \\ &< \sum_{n=0}^{\infty} Mq^n. \end{aligned}$$

于是幂级数诸项绝对值由收敛的几何级数控制.

由此可见, 式 1 给出的幂级数的收敛域或者只是一个点 a , 或者至少包含某个以 a 为圆心的开圆盘. 这样的开圆盘中最大者叫做幂级数的收敛圆 (**disk of convergence**), 其半径称为收敛半径 (**radius of convergence**). 幂级数的收敛半径由柯西-阿达玛公式^[21] 给出. 在收敛圆的边界上, 无法作出幂级数是否收敛的一般论断, 例如幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在点 $z = \pm 1$ 处皆发散, 但其和函数 $1/(1-z)$ 在 $z = 1$ 时为奇异, 在 $z = -1$ 时表现正常.

幂级数的运算

幂级数的四则运算与一般级数的四则运算无异.

定理 2 幂级数的微分与积分

幂级数在进行逐项微分与逐项积分后, 其收敛圆不变. 因此, 幂级数的和函数可以在收敛圆内逐项微分, 也可以逐项积分. 幂级数的和函数在收敛圆内是无穷可微的.

这是柯西-阿达玛公式^[21] 的直接推论.

解析函数

由收敛幂级数表示的复变函数称为**解析函数 (analytic function)**. 它与用复可微性定义的全纯函数 (**holomorphic function**)^[2?] 是等价的对象, 尽管这个事实的证明并不平凡 (需要用到柯西积分公式). 如果限制自变量取实数, 那么得到的是**实解析函数 (real analytic function)**. 等价地, 实解析函数是泰勒级数收敛到其自身的函数. 有如下定理:

定理 3

开区间 I 上的实函数 f 为解析函数, 当且仅当对于 I 的任何闭子区间 K , 都有常数 M_K 使得

$$\max_{x \in K} |f^{(n)}(x)| \leq n! M_K^n.$$

证明是直接的计算: 如果 f 满足此条件, 那么可以估算出其泰勒展开式的余项趋于零; 反过来, 如果 f 由收敛幂级数表征, 那么可以估计其逐项微分得到的幂级数的上界而得到 f 的高阶导数所满足的条件.

这个定理说明: 实解析函数的高阶导数随着其阶数的提升不能增长得太快. 举例来说, 函数 $f(x) = e^{-1/x^2}$ 在任何不包含原点的开区间上是解析函数; 在原点处它的各阶导数都是零, 但是对于任何正数 M (不管有多么大), 都可以找到趋于零的序列 x_n , 使得对于充分大的 n 有

$$|f^{(n)}(x_n)| > n! M^n.$$

因此 f 在任何包含原点的开区间上都不是解析函数. 用复变函数论的语言, $z = 0$ 是函数 e^{-1/z^2} 的本性奇点.

由此可见, 泰勒展开式收敛到其自身的函数是非常特殊的.

极坐标中的曲线方程

预备知识 极坐标^[36]

极坐标系中, 我们可以用一元函数

$$r = f(\theta) \tag{1}$$

表示一条曲线. 简单的例子如阿基米德螺线^[38] 或圆锥曲线^[45]. 下面我们讨论如何从函数中计算曲线的一些特征.

计算某点切线的方向

预备知识 导数^[78]

在 x - y 平面直角坐标系中, 我们可以通过求导 (dy/dx) 计算曲线某点切线, 那么式 1 表示的极坐标中如何求某点切线的方向呢? 可以证明, 切线与 $\hat{\theta}$ 方向的夹角为

$$\alpha = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} \quad (2)$$

或者说与 \hat{r} 方向的夹角为 $\pi/2 - \alpha$.

(推导未完成)

曲线长度

预备知识 定积分^[111]

若用 $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, 来表示曲线的一段, 那么其长度为

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta \quad (3)$$

(推导未完成)

函数的算符

预备知识 导数^[78]

未完成: 定积分算符

算符 (也叫**算子**) 可以理解为“函数的函数”, 即一个函数经过算符作用可以得到另一个算符. 例如将一个函数乘以一个数 λ 或另一个函数, 又例如对一个函数求导 (微分算符) 等等.

例 1

令算符 \hat{A} 为

$$\hat{A} = 2 \sin(x) \quad (1)$$

那么它作用在函数 $f(x)$ 上就是

$$\hat{A}f(x) = \sin(x)f(x) \quad (2)$$

令算符 \hat{B} 为

$$\hat{B} = \frac{d}{dx} + 1 \quad (3)$$

那么

$$\hat{A}\hat{B}f(x) = \left(\frac{d}{dx} + 1\right)f(x) = \frac{df(x)}{dx} + f(x) \quad (4)$$

令算符 \hat{C} 为

$$\hat{C} = \hat{A}\hat{B} = \sin(x)\left(\frac{d}{dx} + 1\right) \quad (5)$$

那么

$$\hat{C}f(x) = \hat{A}[\hat{B}f(x)] = \sin(x)\frac{df(x)}{dx} + \sin(x)f(x) \quad (6)$$

令算符 \hat{D} 为

$$\hat{D} = \hat{A} + \hat{B} \quad (7)$$

那么

$$\hat{D}f(x) = \hat{A}f(x) + \hat{B}f(x) \quad (8)$$

令算符 \hat{E} 为

$$\hat{E} = \hat{B}^2 \quad (9)$$

相当于 \hat{B} 对某函数作用两次, 即

$$\begin{aligned} \hat{E}f(x) &= \hat{B}[\hat{B}f(x)] = \left(\frac{d}{dx} + 1\right)\left[\frac{df(x)}{dx} + f(x)\right] \\ &= \frac{d^2f(x)}{dx^2} + 2\frac{df(x)}{dx} + f(x) \end{aligned} \quad (10)$$

所以也可以将这个过程中简写为

$$\hat{B}^2 = \left(\frac{d}{dx} + 1\right)^2 = \frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} + 1 \quad (11)$$

线性

若一个算符 \hat{A} 对两个不同的函数 f, g 和两个不同的常数满足

$$\hat{A}(f + g) \tag{12}$$

是线性的

常微分方程

- 本词条处于草稿阶段.

预备知识 简谐振子^[233]

作为一个引入的例子，我们首先看“简谐振子^[233]”中的式 1. 一般来说，含有函数 $y(x)$ 及其高阶导数 $y^{(n)}$ ，和自变量 x 的等式叫做常微分方程（简称微分方程¹²），即

$$f(y^{(N)}, y^{(N-1)}, \dots, y, x) = 0 \tag{1}$$

上式中的最高阶导数为 N 阶，所以可以把上式叫做 N 阶微分方程. 注意方程中必须出现 $y^{(N)}$ ，剩下的 $y^{(N-1)}, \dots, y, x$ 可以只出现部分或不出现. 所有能使微分方程成立的函数 $f(x)$ 都是方程的解，如果能找到含有参数的函数 $f(x, C_1, \dots, C_N)$ ，使所有可能的解都可以通过给 C_i 赋值来表示，那么这就是函数的通解.

有一些微分方程的解法是显然的，例如描述自由落体运动^[209]的微分方程为 $d^2y/dt^2 = g$ （假设 y 轴竖直向下）. 要解这个方程，只需对等式两边进行两次不定积分即可得到通解为 $y = C_1 + C_2t + gt^2/2$. 一般来说，如果 N 阶微分方程具有 $y^{(N)} = f(x)$ 的形式，只需进行 N 次积分即可得到通解.

另一些方程是可以分离变量的，我们来看“受阻落体^[234]”这个例子. 若方程可分离变量，只需先分离变量，再对等式两边求不定积分即可找到通解.

¹²这里的“常”强调未知函数只有一个变量，用于区别多元微积分中的“偏微分方程”.

一阶线性微分方程

二阶线性微分方程

一阶线性微分方程

- 本词条需要更多参考文献.
- 需要补充例子

预备知识 常微分方程^[123]

具有以下形式的微分方程叫做**一阶线性微分方程**

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \quad (1)$$

一般地, 未知函数及其各阶导数都各占一项时, 方程就是**线性的**. 另外, 如果 $f(x)$ 项不出现, 方程就是**齐次的**, 否则就是**非齐次的**. 我们先来看以上方程对应的齐次方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad (2)$$

这是一个可分离变量的方程, 分离变量得

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx \quad (3)$$

两边积分得

$$\ln |y| = - \int p(x) dx + C \quad (4)$$

两边取自然指数得

$$y = \pm e^C e^{-\int p(x) dx} \quad (5)$$

把 $\pm e^C$ 整体看做一个任意常数 C , 上式变为.

$$y = C e^{-\int p(x) dx} \quad (6)$$

这就是一阶线性齐次微分方程**式 2**的通解, 也叫**式 1**的齐次解.

常数变易法

现在我们用常数变易法来解非齐次方程式 1. 为书写方便, 式 6 中令 $y_0(x) = \exp(-\int p(x) dx)$. 假设上式中的 C 是一个函数 $C(x)$ 而不是常数, 代入式 1 得

$$C'y_0 + C[y_0' + p(x)y_0] = f(x) \quad (7)$$

由于 y_0 是齐次解, 上式方括号中求和为 0, 分离变量得

$$dC = \frac{f(x)}{y_0} dx \quad (8)$$

两边积分得

$$C(x) = \int \frac{f(x)}{y_0} dx \quad (9)$$

所以一阶线性非齐次微分方程的通解为

$$y = y_0 \int \frac{f(x)}{y_0} dx \quad (10)$$

其中

$$y_0(x) = e^{-\int p(x) dx} \quad (11)$$

注意待定常数包含在式 10 的不定积分中, 式 11 中的不定积分产生的待定常数在代入式 10 后可消去.

二阶常系数齐次微分方程

预备知识 常微分方程^[123], 指数函数 (复数)^[62]

- 需要补充例题

¹³二阶常系数齐次微分方程形式如下

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (1)$$

¹³参考 [2]

注意到指数函数 $y = Ce^{rx}$ 第 n 阶导数为 $r^n e^{rx}$, 不妨尝试把指数函数代入方程, 得

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \quad (2)$$

由于 $e^{rx} \neq 0$, 必有 $ar^2 + br + c = 0$. 把这个二次函数叫做特征方程, 解特征方程, 就可以得到方程的解. 根据根的分布, 有如下四种情况

1. 有两个不同的实根 r_1 和 r_2 ($b^2 - 4ac > 0$), 方程的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad (3)$$

2. 有一个重根 r ($b^2 - 4ac = 0$), 方程的通解为

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} \quad (4)$$

3. 有两个纯虚数根 $\pm i\omega_0$ ($b = 0, b^2 - 4ac < 0$), 方程的通解为

$$y = C_1 \cos(\omega_0 x) + C_2 \sin(\omega_0 x) \quad (5)$$

或

$$y = C_1 \cos(\omega_0 x + C_2) \quad (6)$$

其中 $\omega_0 = \sqrt{c/a}$.

4. 有两个复数根 $r \pm i\omega$ ($b \neq 0, b^2 - 4ac < 0$), 方程的通解为

$$y = e^{rx} [C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)] \quad (7)$$

或

$$y = C_1 e^{rx} \cos(\omega x + C_2) \quad (8)$$

其中

$$r = -\frac{b}{2a} \quad \omega = \frac{1}{2a} \sqrt{4ac - b^2} \quad (9)$$

详细推导

情况 1 的结论是显然的，我们先来看情况 3。根据 $y = Ce^{rx}$ 的假设，通解应该是

$$y = C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x} \quad (10)$$

如果这里的 C_1 和 C_2 取任意复数，那么上式就是方程在复数域的通解，其中包含了实数域的通解。这个通解还有另一种等效的形式，令

$$C_1 = \frac{C_3}{2} + \frac{C_4}{2i} \quad C_2 = \frac{C_3}{2} - \frac{C_4}{2i} \quad (11)$$

代入上式得

$$\begin{aligned} y &= C_3 \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} + C_4 \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i} \\ &= C_3 \cos(\omega x) + C_4 \sin(\omega x) \end{aligned} \quad (12)$$

注意如果 C_3, C_4 取任意复数，该式仍然是复数域的通解（因为任何 C_1, C_2 都可以找到对应的 C_3, C_4 ），但只要把 C_3, C_4 限制在实数域中，该式就是实数域的通解。

情况 4 的结论可以类比情况 3 得出，最后我们来看情况 2。我们可以把情况 2 看做情况 4 的一个极限，即 $\omega \rightarrow 0$ 时的情况。如果式 7 中的 C_1, C_2 都是普通常数，则取该极限时可以得到式 4 的第一项 $C_1 e^{rx}$ 。那如何得到第二项呢？我们不妨令式 7 中的 $C_1 = 0$ ， $C_2 = C_3/\omega$ ，再来取极限，得

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} C_3 e^{rx} \frac{\sin(\omega x)}{\omega x} = C_3 x e^{rx} \quad (13)$$

这里用到了“小角正弦值极限^[72]”中的结论。

一维齐次亥姆霍兹方程

- 本词条需要更多参考文献。
- 参考 docx 版物理百科

预备知识 二阶常系数微分方程^[125]

一维齐次亥姆霍兹方程可以记为

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2y = 0 \quad (1)$$

这里 ω 为实数.

通解

这个方程属于二阶常系数线性齐次方程, 可以假设 e^{rt} 为方程的解, 代入原方程得特征方程

$$r^2 + \omega^2 = 0 \quad (2)$$

解得 $r = \pm i\omega$, 即方程在复数域的通解为

$$y = C_1e^{i\omega t} + C_2e^{-i\omega t} \quad (3)$$

其中 C_1, C_2 是复常数.

如果选择恰当的 C_1 和 C_2 , 可以使通解变为实数函数. 令

$$C_1 = C_{1R} + iC_{1I} \quad C_2 = C_{2R} + iC_{2I} \quad (4)$$

把 $y(t)$ 分解为实部和虚部, 令虚部为零, 可得所有可能的实数解

$$\begin{aligned} y(t) = & [(C_{1R} + C_{2R}) \cos \omega t + (C_{2I} - C_{1I}) \sin \omega t] \\ & + i[(C_{1R} - C_{2R}) \sin \omega t + (C_{1I} + C_{2I}) \cos \omega t] \end{aligned} \quad (5)$$

令虚部为 0, 则 $C_{1R} = C_{2R}$, $C_{1I} = -C_{2I}$.

二阶常系数非齐次微分方程

预备知识 二阶常系数齐次微分方程^[125]

结论

在二阶常系数齐次微分方程的右端加上一个函数 $f(x)$ ，就得到了二阶常系数非齐次微分方程

$$y'' + by' + cy = f(x) \quad (1)$$

这就是二阶常系数非齐次微分方程. 其解为

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 f}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} dx \quad (2)$$

其中 W 可以写成二阶行列式

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \quad (3)$$

其中 y_1, y_2, W, f 都是 x 的函数, 后面的括号和自变量被省略. $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是对应齐次方程

$$y'' + by' + cy = 0 \quad (4)$$

的两个线性无关的解.

应用

推导

下面介绍的方法叫常数变易法, 其主要思想可参考一阶线性非齐次微分方程的通解

设通解的形式为

$$y = v_1 y_1 + v_2 y_2 \quad (5)$$

其中, v_i 也是关于 x 的函数. 对该式两边求导, 得

$$y' = v_1' y_1 + v_2' y_2 + v_1 y_1' + v_2 y_2' \quad (6)$$

为了接下来计算方便, 我们规定 v_1, v_2 满足关系¹⁴

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \quad (7)$$

¹⁴这么规定会不会丢失一部分解呢? 或许会, 但是由于我们已经有了式 1 对应的齐次解 y_1 和 y_2 , 根据线性微分方程解的结构 (见同济大学的《高等数学》), 只需要找到式 1 的任意一个解, 就可以找到它的通解.

把式 7 代入式 6, 得到

$$y' = v_1 y_1' + v_2 y_2' \quad (8)$$

继续对求导, 得到

$$y'' = v_1' y_1' + v_2' y_2' + v_1 y_1'' + v_2 y_2'' \quad (9)$$

把式 5 式 8 式 9 代入原方程式 1 得

$$(v_1' y_1' + v_2' y_2' + v_1 y_1'' + v_2 y_2'') + b(v_1 y_1' + v_2 y_2') + c(v_1 y_1 + v_2 y_2) = f \quad (10)$$

化简, 得

$$(v_1' y_1' + v_2' y_2') + v_1 (a y_1'' + b y_1' + c y_1) + v_2 (a y_2'' + b y_2' + c y_2) = f \quad (11)$$

由于 y_1 和 y_2 都是式 4 的解, 式 (9) 化为

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = f \quad (12)$$

总结一下, 刚刚的推导说明, 和在 (5) 的假设条件下, 只要满足 (10) 即可满足 (1) 式. 联立 (5) 和 (10) 式, 得到关于 v_1' 和 v_2' 的方程组

$$\begin{cases} y_1 v_1' + y_2 v_2' = 0 \\ y_1' v_1' + y_2' v_2' = f \end{cases} \quad (13)$$

解得

$$\begin{cases} v_1' = -y_2 f / W \\ v_2' = y_1 f / W \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad (15)$$

对 (13) 的两条式子积分, 即可得到

$$v_1 = - \int \frac{y_2 f}{W} dx + C_1 \quad (16)$$

$$v_2 = \int \frac{y_1 f}{W} dx + C_2 \quad (17)$$

(15) (16) 代入 (5) 式, 得到方程 (1) 的解为

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 f}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} dx \quad (18)$$

由于上式满足线性微分方程解的结构, 所这已经是通解了. 但是必须注意, 根据常数变易法, 我们只能在没有零点的区间内找到方程式 1 的通解.

第三部分

线性代数

第一章

几何矢量

几何矢量

- 本词条存在未完成的内容.
- 本词条需要重新创作和整合，融入章节逻辑体系.

预备知识 集合^[17]，充分必要条件^[33]

我们来回顾高中学的几何矢量，本文中常简称为“矢量”。粗略地说，矢量是空间中的一些有长度有方向的箭头。我们对它的位置不感兴趣，所有长度和方向相同的矢量都视为同一矢量。本书中矢量用正黑体表示，如 \mathbf{a} 。在手写时，可以在字母上方加箭头表示，如 \vec{a} 。特殊地，如果一个矢量的长度等于 1，那么它就是一个单位矢量，本书中在矢量上面加上“^”符号表示单位矢量，如 $\hat{\mathbf{a}}$ 。为了与矢量区分，我们把单个的实数或复数称为标量。

几何矢量

矢量 (vector) 又被翻译为向量。这个概念最初来自直观的几何矢量。早在民国时期，学者们引入 vector 的概念时就将其译成了汉语。由于当时的物理学家和数学家没有太多交集，物理学家将它翻译为向量，而数学家翻译为矢量。90 年代时，国家名词委员会商议确定一个统一的 vector 译名，但却无法轻易割舍两个译名中的任何一个，因为它们都非常信达雅地表明了 vector 的含义：向量即有方向的量，矢量即像箭矢一样的量。大概是出自物理学家和数学家的互相尊重，最后确定的方案是双方互换译名，从此物理学界称矢量，数学界称向量¹。本书中不区分两个译名的使用。

本词条中讨论的几何矢量，也是经典物理学中最长见的一类矢量，是一种具有长度和方向的量，因此可以画成箭头来表示。生活中这样具有长度和方向的量十分常见：速度有大小有方向，因此可以表示为箭头，箭头的长度代表

¹以下加粗部分为力学家朱照宣教授的回忆。在 20 世纪 90 年代初，国家名词委为此 (vector) 召开会议，想协调双方，由主任钱三强亲自主持。我曾戏称这是个“一字会”。当时的情况是，学科有分支，术语有派生，犹如家族有后裔。祖宗互相谦让，但子孙繁多，已无法协调。钱先生在会上没有说倾向于哪方面的话。矢量、向量的分歧，一直维持到今。力学这学科，和数学、物理同样有“亲”，力学中 vector 用什么？当年我在“一字会”后还有情绪，埋怨钱先生作为领导“不表态”。过了好些年，才懂得这类事，最多只能因势利导，不能靠行政命令或专家拍板。事实上，台湾物理界至今用的是还“向量”。

速度的大小；加速度^[202]也有大小，有方向；我从一个地方运动到另一个地方，那么从起点到终点可以画一根箭头，这箭头就是位移矢量^[198]。不止在生活中，一切领域里具有方向和大小概念的量都被称为几何矢量。

为什么要强调是“几何”矢量呢？在数学中，矢量的含义要比几何矢量更广泛，也就是说，几何矢量虽然是数学家所研究的矢量的一种，但不是唯一的一种，广义来说任何矢量空间^[201]中的元素都叫做矢量。以后会看到，本文介绍的矢量是一个“实数域上的赋范线性空间”中的元素。这个名字听起来很吓人，但它其实只是三个概念的结合：实数域，范数和线性空间。实数域即我们所熟悉的实数，它作为一个域使得我们可以用它来构建线性空间，而范数则是线性空间上一种表达向量的“绝对值”的函数。这些概念我们都会在对应该词条中深入讨论。

零矢量

特别地，长度为零的矢量称为**零矢量 (zero vector)**，不作方向区分（可以认为它与任何矢量平行）。零矢量依然是矢量，要注意和数字零进行区分。

几何矢量与起点无关

需要注意的是，为了避免引入过多的要素从而导致概念过于复杂，我们目前讨论的几何矢量只有两个本质属性，长度和方向。将任一矢量进行任意平移后，它仍然是同一个矢量。

当你熟悉了基本的微积分和线性代数后，可以进入微分几何的学习。在微分几何中，我们讨论一种叫“切向量”的对象，这就是一种和所在位置有关的抽象的向量。当然，本节作为线性代数的第一节课，到切向量还有不少东西要掌握，因此只需要知道有这么回事就足够了。

当然，如果矢量平移并不改变矢量本身，我们完全可以把所有几何矢量的起点都挪到一起，以这个公共起点为**原点**，那么空间中**矢量的终点所在点就和矢量本身一一对应**。这可能会带来一个问题：我们知道，杠杆原理中力的作用效果和力的作用点相关，而力又是矢量，这似乎和“平移不变”矛盾。实际上，在描述杠杆原理等规律时，我们使用两个矢量，一个是力的矢量，一个则是力的作用点的位置矢量^[198]，位置矢量的原点根据问题需要来选取。

当把所有矢量的起点都挪到原点后，我们就可以用终点的几何坐标来描述几何矢量。

未完成：以下的需要大量依赖“几何矢量的运算”。是否划分到新词条？

坐标和维度

从现在开始，如无特别说明，我们默认几何矢量起点在原点。这样，我们就可以把一个矢量理解为空间中的一个点，即它的终点。本节仅从直觉上引入坐标的概念，基本上是符合多数人的几何直觉的。要更准确地描述相关概念，请参考词条。

未完成：请援引相关词条。

我们知道，实数轴可以看成是一个一维的几何空间。如果以数字 0 所在的点为原点，那么我们也可以把这根轴本身看成是一个几何矢量的集合，每个数字所在的点都是一个几何矢量。如图 1 所示，点 P 表示一个长度为 3.14 的矢量，而点 Q 表示一个长度为 6 的矢量。这样一来，每个实数 x 都可以表示一个矢量，其长度为 $|x|$ ；当 $x > 0$ 时，对应的矢量指向正方向，当 $x < 0$ 时指向负方向，而对于 $x = 0$ ，它对应的是零矢量，而零矢量没有方向之分。任何方向的零矢量都是同一个矢量。

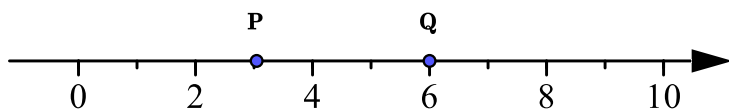


图 1: 实数轴上的几何矢量。

实数轴上的矢量只有一个方向可以选择，虽然有正负之分，但都沿着一条线。因此只需要用一个实数就可以唯一地表示一个矢量。这样的实数，就是对应矢量在实数轴上的一个坐标，该实数的绝对值就是矢量的“长度”。

这里所说的矢量的长度和日常经验可能有所不同。当我们讨论一个长度为 1 m 的位移矢量时，我们可以有不同的坐标来描述这一个矢量，或者说，可以把 1 m 对应到不同的实数。如果我们用每格长 1 m 的坐标轴去度量，那么这个矢量的“长度”就是 1；如果用每格长 1 mm 的坐标轴去度量，那么其“长

度”就是 1000. 因此我们所说的长度并不具有绝对的意义, 而只有相对的意义²: 同一个矢量的长度在不同坐标表示下可能不一样, 但是无论在什么坐标表示下, 两条“共线”的矢量的长度之比都是一样的.

实数轴上的矢量没有方向区分(最多是正负之分), 因此不用考虑方向, 方便我们专心讨论长度问题. 实数轴被称为一个一维的几何矢量空间, 因为所有矢量只需要一个数字就能唯一确定.

是否存在需要更多数字才能确定一个矢量的空间呢? 当然有, 二维平面就是这样空间, 其上的矢量就需要两个数字来描述. 这个时候矢量就有方向之分了, 如图 2 中矢量 P 的方向“北偏东 45° ”和 Q 的方向“正东”就有所区别了.

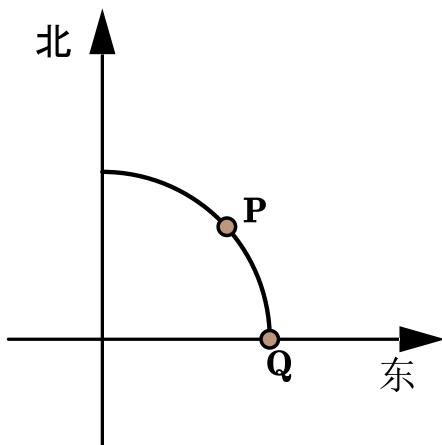


图 2: 二维平面上的几何矢量.

因为矢量是“具有长度和方向”的量, 我们可以用一个数字来表示矢量的长度, 一个数字来表示矢量的方向(从给定轴算起逆时针旋转的角度, 即辐角), 这就是极坐标^[36]的表示方法. 当然, 我们更熟悉的是用直角坐标系来表示, 如图 2 所示, 如果矢量 P 和 Q 的长度都是 1, 但 P 的辐角为 $\pi/4$, Q 的辐角为 0, 那么直角坐标系下就可以把 P 表示为 $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, 把 Q 表示为 $(1, 0)$.

同理, 三维空间中的矢量需要用三个数字来确定.

矢量的坐标表示, 不一定直接体现了矢量的两个要素: “方向”和“长度”, 但是一定蕴含了这两个要素. 比如说, 图 3 中矢量 P 的长度并没有直接出现在其坐标 (a_x, a_y, a_z) 中, 但是可以用坐标计算出来: $\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

²严格来说, 这是因为对于同一个矢量空间, 我们可以赋予不同的范数/内积^[??].

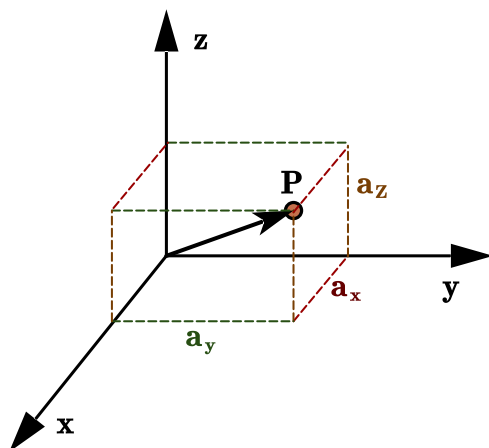


图 3: 三维空间里的几何矢量.

我们容易想象出 1 到 3 维的几何矢量空间以及它们的两种运算，但却很难想象更高维的情况。作为本章的主要目的，当你理解了本章的所有甚至只是部分词条后，应当可以熟悉该如何讨论任意维度的空间。讨论的核心在于， n 维空间中的每个矢量都需要 n 个数字来确定，我们可以“定义”一个直角坐标系，把 3 维直角坐标系中的性质推广开来。

拓展：斜坐标系

当笛卡尔首次提出“坐标”的概念时，他并没有指定必须是“直角坐标”。实际上，他认为任何两根不平行的直线都可以用来刻画二维平面上的坐标，具体方式详见斜坐标系^[27]。不只是二维平面，任意维度的空间中都可以使用斜坐标系来描述空间中的点。

使用直角坐标系的好处是高度对称，因为当你选定相互垂直的 x 轴和 y 轴以后， y 轴的两边到 x 轴的角度都是 $\pi/2$ ；另外，几何学中的勾股定理依赖于直角；虽然我们也可以用余弦定理来描述任意三角形的边长关系，但比起勾股定理要麻烦得多，因为表达式中多了一项。使用直角坐标系能让讨论简洁很多。

你可能注意到了，“垂直”本身是一个经验上的概念，似乎没有任何理论上的方法可以不借助量角器等工具判断一个角到底是不是直角。也就是说，“垂直”是一个没有定义的概念。我们将会[在矢量内积^{\[46\]}](#)中讨论该如何定义垂直。

未完成：矢量内积词条尚未整理好以配合本词条.

参考书推荐

对于几何矢量在高中数学以及几何学中的用途，张景中院士的《绕来绕去的向量法》一书的内容通俗易懂且内容丰富，单增的《向量与立体几何（数学奥林匹克命题人讲座）》也是一本实用的小册子. 感兴趣的读者可用这两本读物作参考. 另外，数学界也借用物理中“质心”的概念，发展出了“质点几何学”分支，其本质仍然和向量几何一模一样，只不过换了个观点看问题，实质上是仿射几何的一种优化版表述；在上述张景中院士的书中提到了质点几何学，莫绍揆教授也出版了专门讨论此话题的《质点几何学》，但并不建议读者特意花太多精力学习³.

未完成：以下内容需要迁移到其它相关词条.

沿一条直线的所有矢量都是共线的，所以在一条直线上最多不超过一个矢量线性无关，所有这些共线的矢量的集合^[17]以及它们的加法和数乘运算组成一个**一维矢量空间**. 注意这里先不需要了解矢量空间的一般定义^[20]. 一维矢量空间中的任意矢量都可以通过某个固定的矢量乘以某个数得到. 同理，一个平面上的所有矢量的集合以及它们的加法和数乘运算，组成一个**二维矢量空间**，二维矢量空间中最多只能找到两个线性无关的矢量，确定它们以后，它们的线性组合可以得到平面上任意其他矢量（例如直角坐标系的两个单位矢量）. 一般地，我们把最多只包含 N 个线性无关矢量的矢量空间叫做 N 维的.

我们容易想象出 1 到 3 维的几何矢量空间以及它们的两种运算，但却很难想象更高维的情况，我们只能试着用公式定理以及低维的类比来理解它们. 例如在狭义相对论的闵可夫斯基空间^[21]中，我们把时间看成空间的第四个维度，但在画图时，我们往往把空间简化为二维的，这样就可以用三维示意图来表示四维时空.

N 维空间中的任意一组线性无关的 N 个矢量 $\beta_1 \dots \beta_N$ 可以作为一组**基底 (basis)**，记为 $\{\beta_i\}$ ，简称**基**. 基是有序的，即使是同一组矢量，如果顺序不同，也要视为不同的基.

³如果你好奇的话，只需要知道向量法中的**定比分点公式**就是连接质点几何和向量几何的桥梁，就可以把几何问题在这两个观点之间互相转化了.

如果在这组基底中加入该空间中任意一个矢量 \mathbf{v} , 这组 $N + 1$ 个矢量必定线性相关 (否则空间就是 $N + 1$ 维的), 即存在不全为 0 的实数 $c_1 \dots c_{N+1}$ 使下式成立

$$\sum_{i=1}^N c_i \boldsymbol{\beta}_i + c_{N+1} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (1)$$

我们还可以得知 c_{N+1} 必不为零⁴, 所以我们可以把等式两边除以 c_{N+1} , 将 \mathbf{v} 用 $\{\boldsymbol{\beta}_i\}$ 的线性组合表示. 令 $x_i = -c_i/c_{N+1}$, 该空间中任意矢量 \mathbf{v} 都有

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N x_i \boldsymbol{\beta}_i \quad (2)$$

这里的 N 个有序实数 (x_1, x_2, \dots, x_N) 就是 \mathbf{v} 关于基底 $\{\boldsymbol{\beta}_i\}$ 的坐标 (coordinates).

例 1 直角坐标

直角坐标是我们最常用的坐标之一. 在三维矢量空间中, 首先确定三个互相垂直的单位矢量 (通常还要求符合右手定则^[13]), 这里分别记为 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ (也有教材记为 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$). 显然, 它们是线性无关的, 可以作为基底. 要确定从坐标原点到空间中任意一点的矢量 \mathbf{v} , 我们可以画出一个长方体 (图未完成), 它沿三个方向的边长 x, y, z 就是矢量 \mathbf{v} 的三个坐标 (三个有序实数), 满足线性组合

$$\mathbf{v} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (3)$$

例 2 斜坐标系

事实上三维矢量空间中任何三个长度不为零且不共线不共面的矢量都可以作为一组基底. 当我们要需按照矢量 \mathbf{v} 的坐标, 就画一个平行六面体 (图未完成), 坐标轴上的三条边长就是 \mathbf{v} 的三个坐标. 这样的坐标系叫做斜坐标系. 这里同样有类似式 3 的线性组合关系.

定理 1 坐标的唯一性

有限维空间中, 任意给定一个矢量 \mathbf{v} 和一组基底 $\{\boldsymbol{\beta}_i\}$, 那么 \mathbf{v} 关于 $\{\boldsymbol{\beta}_i\}$ 的坐标是唯一确定的.

⁴反证法: 如果 $c_{N+1} = 0$, 则可得出基底线性相关, 不成立

我们可以用反证法证明坐标的唯一性. 假设有两组不全相同的系数都可以使式 2 成立, 分别记为 x_i 和 x'_i . 那么分别代入上式再把两式相减得到

$$\sum_{i=1}^N (x_i - x'_i) \beta_i = \mathbf{0} \quad (4)$$

由于 $(x_i - x'_i)$ 不全为零, 得基底 $\{\beta_i\}$ 线性相关, 而这与基底的定义矛盾. 证毕.

显然, 基底不同时, 同一个矢量的坐标也不同, 因此坐标不能简单地等同于矢量本身. 只有在讨论中固定了基的选择时, 才可以把坐标和矢量本身等同.

我们通过一个例子来说明如果用一组线性相关的矢量的线性组合来表示另一个矢量, 那么系数是不唯一的.

例 3 线性相关组的表示不唯一

考虑一维几何矢量空间的两个不同几何矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} , 模长分别为 a 和 b . 矢量组 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ 是线性相关的, 因为两个向量可以互相表示: $\mathbf{a} = (a/b)\mathbf{b}$.

对于任意一个矢量 \mathbf{c} , 模长为 c , 如果用 \mathbf{a}, \mathbf{b} 来表示, 都有无穷种组合

$$\mathbf{c} = \frac{\lambda}{a} \mathbf{a} + \frac{c - \lambda}{b} \mathbf{b} \quad (5)$$

其中 λ 可以是任意实数.

习题 1 计算坐标

以上所说的坐标不一定是直角坐标系的坐标. 例如平面上两个基底 β_1 与 β_2 的长度分别为 1 和 2. 夹角为 $\pi/3$, 矢量 \mathbf{v} 恰好落在两个基底的角平分线上, 长度为 3. 求 \mathbf{v} 的坐标. 答案: $1/\sqrt{3}, 1/(2\sqrt{3})$.

习题 2 计算坐标

三维几何矢量空间中, 建立直角坐标系, 基底为 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. 请证明直角坐标 (即关于基底 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 的坐标) 为 $(2, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 4)$ 的三个矢量线性无关, 并用这三个矢量作为基底, 求直角坐标为 $(1, 1, 1)$ 的矢量关于这组基底的坐标.

坐标的运算

我们常常把一个矢量的坐标写成一列，叫做**列矢量**，如

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\{\beta_i\}} \quad (6)$$

在列矢量的右下角声明基底是较为严谨的做法，但为了书写简洁，在不至于混淆的情况下我们可以将其省略。另外在正文中，为了节约空间，我们将式 6 记为 $\mathbf{v} = (x, y, z)_{\{\beta_i\}}^T$ ，其中 T 表示矩阵的转置（见“矩阵^[158]”式 2）。同样，我们时常省略 $\{\beta_i\}$ 。

当我们说两个矢量**相等**时，意味着同一基底下两矢量的坐标全都相等。若两矢量在不同基底下的列矢量，则需要先将它们变换到同一基底下再判断是否相等（我们以后再讨论如何进行基底变换）。

当我们确定基底后，以上介绍的加法和数乘都有对应的坐标运算。由式 2 及矢量加法和数乘的交换律和结合律得

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}_{\{\beta_i\}} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}_{\{\beta_i\}} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}_{\{\beta_i\}} \quad (7)$$

$$\lambda \mathbf{v} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\{\beta_i\}} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}_{\{\beta_i\}} \quad (8)$$

要特别注意的是，当定义了多组基底时，只有基底相同的两个列矢量按照式 7 相加才有意义。

几何矢量的运算

预备知识 几何矢量^[133]

把所有几何矢量收集到一起，构成一个集合，本身没什么可以研究的。在集合^[17]中我们说过，没有任何附加结构的集合中，元素叫什么都不重要，只有元素数量重要。

幸运的是，矢量集合有讨论的意义，因为我们可以引入了矢量的运算，这样，矢量集合就有了可以研究的运算结构。

矢量的加减和数乘

矢量的加法

第一个矢量运算，是矢量间的加法。两个矢量相加，结果是另一个矢量，具体定义如下。

如图 1，两个矢量相加，既可以使用平行四边形法则，也可以用三角形法则。平行四边形法则是指先将两个矢量移动到共同的起点，然后以它们为边做一个平行四边形，再由对角线得到相加后的矢量。三角形法则是指将第二个矢量的起点移动到第一个矢量的终点，然后作出从第一个矢量起点指向第二个矢量终点的矢量。容易证明，二者的结果是一样的。

若有多个矢量连续相加，我们既可以依次使用平行四边形法则，也可以分别把它们依次首尾相接，结果就是由起点指向终点的矢量。二者结果也是一样的，证明留作习题。

容易证明矢量的加法满足交换律（commutative property）

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (1)$$

以及结合律（associative property）

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \quad (2)$$

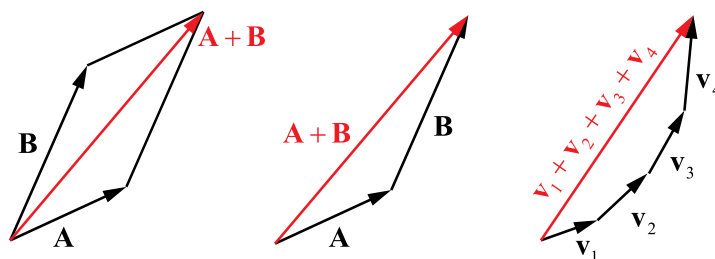
矢量的数乘 共线

第二个矢量运算，是一个矢量和一个数字的乘积，得到一个矢量，称为数乘，我们用例子定义如下。

如图 2，一个矢量与一个正实数相乘，则方向不变，把长度乘以这个实数。若这个数是负数，则把矢量取反方向再把长度乘以这个实数数的绝对值即可。

9/19/2020

wuli.wiki/changed/GVec_1.svg?v=9f9c373edaf54d



wuli.wiki/changed/GVec_1.svg?v=9f9c373edaf54d

1/1

图 1: 矢量的加法

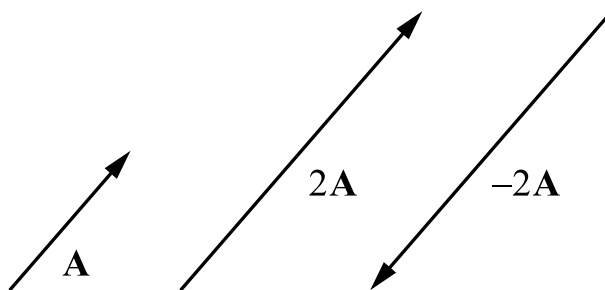
若 λ, μ 表示实数, 容易证明分配律 $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$ 和 $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$, 结合律 $\lambda(\mu\mathbf{A}) = (\lambda\mu)\mathbf{A}$.

如果两个矢量的关系可以用 $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{B}$ 表示, 那么它们就是共线的. 共线的充分必要条件^[33]是, 两矢量方向相同或相反.

特殊地, 如果把一个矢量乘以 -1 , 那么它的长度不变, 而方向相反. 我们把这个新矢量叫做原矢量的逆矢量 (**inverse vector**). 矢量 \mathbf{A} 的逆记为 $-\mathbf{A}$.

9/19/2020

wuli.wiki/changed/GVec_2.svg?v=915bbct1a9564a8



wuli.wiki/changed/GVec_2.svg?v=915bbct1a9564a8

1/1

图 2: 矢量的数乘

矢量的减法

由于加法和数乘,我们并不需要另外定义所谓的**矢量减法**,只需要把 $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ 看成 \mathbf{A} 加上 \mathbf{B} 的逆即可,即

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} \equiv \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \quad (3)$$

几何上来说,容易证明(留做习题)要计算 $\mathbf{A} - \mathbf{B}$,就先把它们起点移动到一起,然后画出从 \mathbf{B} 的终点指向 \mathbf{A} 的终点的矢量即可.

移项

矢量的加减法和我们熟知的标量加减法有许多相似之处,我们甚至可以像标量移项一样对几何矢量的表达式进行移项.例如我们有表达式

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{D} \quad (4)$$

显然在等式两边同时加上或减去相同的矢量仍然可以使等式成立，于是两边同时减 \mathbf{C} 再同时减 \mathbf{D} 得

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C} - \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (5)$$

这看起来就像我们把等号右边得项移动到了等号左边，并添加了负号。

一个小技巧是，在画矢量减法 $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{C}$ 时，如果你忘记了 \mathbf{C} 是从 \mathbf{A} 指向 \mathbf{B} 还是 \mathbf{B} 指向 \mathbf{A} ，那么可以检查一下画出来的三个矢量是否满足 $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ 。

矢量的线性组合

把有限个矢量 \mathbf{v}_i 分别与若干实数 c_i 相乘再相加就得到了这些矢量的一个线性组合

$$\sum_i^N c_i \mathbf{v}_i = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_N \mathbf{v}_N \quad (6)$$

注意，若无特别说明，线性组合仅指有限个矢量的数乘和加法。

根据矢量加法和数乘的定义，容易得知任何有限个矢量的任何线性组合仍然是一个矢量。

习题 1

试说明任意两个不共线的矢量的所有线性组合都会落在同一个平面上。

线性相关性

如果存在至少一组不全为零系数 c_i 使几个矢量的线性组合等于零，这些矢量就被称为线性相关的

$$\sum_i^N c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad (7)$$

这是因为对于任何一个 c_j 不为零的项，矢量 \mathbf{v}_j 都可以表示为其他矢量的线性组合。只需把上式除以 c_j 即可

$$\mathbf{v}_j = - \sum_{i \neq j} \frac{c_i}{c_j} \mathbf{v}_i \quad (8)$$

如果不存在这样的系数，这些矢量就是线性无关的，即任何矢量都不可能被其他矢量的线性组合表示。

习题 2

试说明任意两个共线的矢量必然是线性相关的，平面任意三个矢量必然是线性相关的。

如果一个矢量集中的矢量是线性相关的，那么这个集合被称为一个**线性相关组**；反之，若线性无关，则称为一个**线性无关组**。

如果一组矢量之间线性相关，那么至少有一个矢量是“冗余”的，也就是说，它可以被其它矢量的线性组合表示出来。这样一来，对于线性相关的矢量组，如果用它们的线性组合来表示其它矢量，那么表示方式都不是唯一的。线性无关的矢量组，最重要的性质就是它们的线性组合表达式是唯一的，由此引入了基底、坐标等概念。

矢量的乘法

内积

几何矢量的内积

预备知识 几何矢量^[133]

几何定义

我们先来看内积的几何定义。注意该定义不需要任何坐标系的概念。

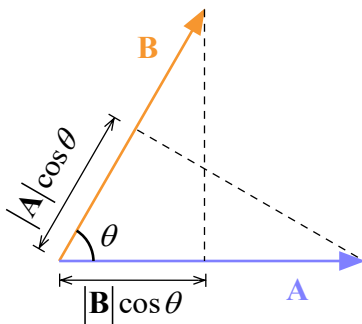


图 1: 内积的几何定义

如图 1, 两个几何矢量的内积 (inner product)⁵就是把它们的模长相乘, 再乘以它们的夹角的余弦值. 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta \quad (1)$$

其中 θ 是两个矢量的夹角. 注意两个矢量的内积得到的是一个标量. 几何定义中 (图 1), 既可以把内积理解为 \mathbf{A} 投影在 \mathbf{B} 上的模长乘以 \mathbf{B} 的模长, 也可以理解为 \mathbf{B} 投影在 \mathbf{A} 上的模长乘以 \mathbf{A} 的模长⁶. 可见当两矢量模长不变时, 若方向相同, 内积取最大值 $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$; 若方向相反, 内积取最小值 $-|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$; 若相互垂直, 则内积为 0.

我们说两个内积为 0 的矢量互相垂直, 或者说正交. 几何矢量与自身内积可得该矢量模长的平方. 单位矢量与自己的内积等于 1. 把一个矢量除以自身模长得到同方向单位矢量的过程叫做矢量的归一化.

内积的性质

1. 交换律⁷

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (2)$$

2. 分配律⁸

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (3)$$

注意内积不满足结合律, 即

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \neq \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (4)$$

前者是 \mathbf{C} 方向的矢量, 后者是 \mathbf{A} 方向的矢量, 显然不相等.

内积的坐标运算

若已知 \mathbf{A}, \mathbf{B} 在平面直角坐标系 xy 中坐标分别为 (A_x, A_y) 和 (B_x, B_y) , 那么如何用坐标表示内积运算的结果呢? 先用正交归一基^[?]将两矢量展开

$$\mathbf{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} \quad \mathbf{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} \quad (5)$$

⁵也叫点积或点乘, 标量积 (scalar product)

⁶在这种理解下, 若量矢量的夹角为钝角, 投影长度取负值

⁷由式 1 易证

⁸证明见词条最后.

所以

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}}) \cdot (B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}}) \quad (6)$$

根据分配律式 3, 我们可以把两个括号拆开, 变为 4 个内积之和.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + A_y B_y \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}} + A_x B_y \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} + A_y B_x \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad (7)$$

其中 $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0$ (相互垂直), 而 $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = 1$ (相互平行且模长都为 1). 所以最后结果为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y \quad (8)$$

同理, 可以在三维直角坐标系 xyz 中把内积结果用坐标表示

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (9)$$

注意内积的代数定义也可以拓展到更高维的情况甚至复数的情况, 即对于复数域的 u_1, u_2, \dots, u_N 和 v_1, v_2, \dots, v_N ,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_k u_k v_k \quad (10)$$

注意虽然上式中的坐标取决于正交归一基底的选取, 但内积的结果却与基底的选取无关. 这是因为内积的几何定义是两个几何矢量间的几何性质, 与基底无关.

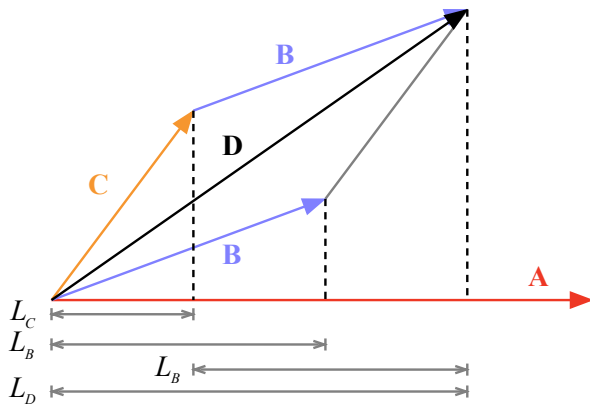


图 2: 内积分配律的证明

证明内积的分配律

如图 2, 令 $\mathbf{D} \equiv \mathbf{B} + \mathbf{C}$, 把 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}$ 分别用几何定义理解为 \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} 在 \mathbf{A} 上的投影乘 $|\mathbf{A}|$, 且令投影长度分别为 L_B, L_C, L_D . 那么要证明 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, 只需证明 $L_D = L_B + L_C$ 即可. 现在把 \mathbf{B} 平移使其起点与 \mathbf{C} 的终点对接 (投影长度不变). 从图中立即得出 $L_D = L_B + L_C$.

矢量叉乘

预备知识 三阶行列式^[179]

矢量叉乘在物理定律中十分常见, 例如在讨论力学中的力矩^[265], 角动量^[269], 以及电磁学中的洛伦兹力^[?], 安培力^[?]时都会使用. 下面我们讨论的矢量都是三维空间中的几何矢量^[133], 在讨论它们的坐标时, 我们默认取正交归一基底.

叉乘的几何定义

两个几何矢量 \mathbf{A} , \mathbf{B} 的叉乘 (cross product) 也叫叉积 (cross product), 向量积 (vector product) 或矢量积. 叉乘的结果是一个矢量 \mathbf{C} . 叉乘用 “ \times ” 表示, 且不可省略, 即 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$

定义 1 矢量叉乘

要确定一个几何矢量, 只需分别确定模长和方向:

1. \mathbf{C} 的模长等于 \mathbf{A}, \mathbf{B} 的模长之积与夹角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 的正弦值相乘.

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \theta \quad (1)$$

2. \mathbf{C} 的方向垂直于 \mathbf{A}, \mathbf{B} 所在的平面, 且由右手定则^[13] 决定.

与内积和数乘不同, 叉乘不满足交换律. 根据几何定义, $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 模长相同, 方向却相反. 表示某个矢量的反方向, 就是在前面加负号, 所以有

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (2)$$

叉乘与数乘的混合运算

在 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$ 中, \mathbf{C} 的方向仅由 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的方向决定. 当 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的方向不变时, \mathbf{C} 的模长正比 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的模长相乘. 假设 λ 为常数 (标量), 显然有

$$(\lambda \mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (\lambda \mathbf{B}) = \lambda(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (3)$$

即标量的位置可以任意变换, 但矢量与乘号的位置关系始终要保持不变.

叉乘的分配律

叉乘一个最重要的特性, 就是它满足分配律.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (4)$$

由式 2 及上式可以推出

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{C} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = -\mathbf{C} \times \mathbf{A} - \mathbf{C} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} \quad (5)$$

从几何的角度理解, 这个结论并不显然 (见矢量叉乘分配律的几何证明^[152]).

叉乘的坐标运算

按照上面的定义, 在右手系中, 三个坐标轴的单位矢量 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 满足

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} \quad (6)$$

由式 2 可得

$$\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z} \quad \hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x} \quad \hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y} \quad (7)$$

根据定义, 一个矢量叉乘自身, 模长为 0. 所以叉乘结果是零矢量 $\mathbf{0}$. 于是又有

$$\hat{x} \times \hat{x} = \mathbf{0} \quad \hat{y} \times \hat{y} = \mathbf{0} \quad \hat{z} \times \hat{z} = \mathbf{0} \quad (8)$$

式 6, 式 7 和式 8 中共 9 条等式描述了 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 中任意两个叉乘的结果.

把矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 分别在直角坐标系的三个单位矢量展开, 得到

$$\mathbf{A} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} \quad \mathbf{B} = b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z} \quad (9)$$

(a_x, a_y, a_z) 和 (b_x, b_y, b_z) 分别是 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的坐标. 根据叉乘的分配律 (式 4 式 5), 可得到如下 9 项

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (a_x \hat{\mathbf{x}} + a_y \hat{\mathbf{y}} + a_z \hat{\mathbf{z}}) \times (b_x \hat{\mathbf{x}} + b_y \hat{\mathbf{y}} + b_z \hat{\mathbf{z}}) \\ &= +a_x b_x (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}}) + a_x b_y (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}) + a_x b_z (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}}) \\ &\quad + a_y b_x (\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}}) + a_y b_y (\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}}) + a_y b_z (\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}}) \\ &\quad + a_z b_x (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}) + a_z b_y (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}}) + a_z b_z (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}})\end{aligned}\quad (10)$$

注意每一项中的运算在式 6 到式 8 中都能找到答案, 于是上式化为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{\mathbf{x}} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{\mathbf{y}} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{\mathbf{z}} \quad (11)$$

令 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, 则 \mathbf{C} 的分量表达式为

$$\begin{cases} c_x = a_y b_z - a_z b_y \\ c_y = a_z b_x - a_x b_z \\ c_z = a_x b_y - a_y b_x \end{cases} \quad (12)$$

式 11 可以用三阶行列式^[179] 表示为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (13)$$

与普通行列式不同的是, 这个行列式中第一行的元素是矢量, 所以得出的结果也是矢量.

叉乘在物理中的应用如: 圆周运动的线速度 (式 5^[203]), 洛伦兹力 (??^[??]), 安培力 (??^[??]).

例 1 求三角形面积与法向量

空间直角坐标系中三角形的三点分别为 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 1, 1)$. 求三角形的面积和一个单位法向量.

令 O 到 A 的矢量和 O 到 B 的矢量分别为

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (1, 1, 0) - (0, 0, 0) = (1, 1, 0) \\ \mathbf{b} &= (-1, 1, 1) - (0, 0, 0) = (-1, 1, 1)\end{aligned}\quad (14)$$

三角形的面积为

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \theta \quad (15)$$

其中 θ 是 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角. 根据式 1, 有⁹

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \theta = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \quad (16)$$

令

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}} \quad (17)$$

坐标为 $(1, -1, 2)$, 模长为 $|\mathbf{v}| = \sqrt{1+1+2^2} = \sqrt{6}$, 所以面积为 $S = \sqrt{6}/2$.

根据叉乘的几何定义, $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ 就是三角形的法向量, 进行归一化¹⁰ 得单位法向量为

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(1, -1, 2)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \quad (18)$$

例 2 建立新的参考系

已知空间中 A, B, C 三点的坐标四点构成一个三棱锥, 边 AB, AC, AD 的边长都是 1, AB 与 AC 的夹角为 60° , 边 AD 与平面 ABC 的夹角为 45° , 请任意建立参考系, 求四个顶点的坐标.

解: (未完成)

矢量叉乘分配律的几何证明

预备知识 矢量的叉乘^[149]

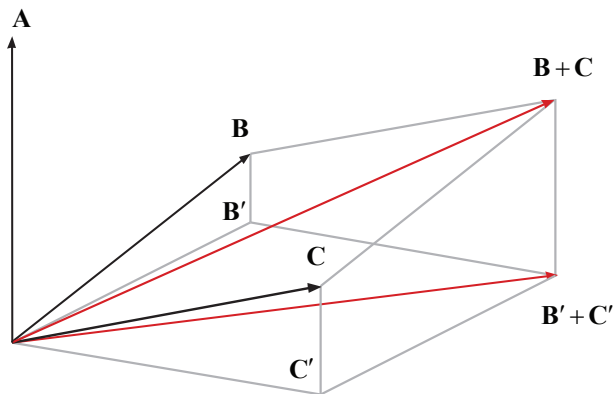
证明 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$

首先令

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} + \mathbf{C} \quad (1)$$

⁹可见 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ 是以 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 为边的平行四边形的面积.

¹⁰把矢量长度变为 1, 方向不变

图 1: 把 B, C, D 投影到与 A 垂直的平面上

把矢量 B, C, D 在与矢量 A 垂直的平面上投影, 分别得到 B', C', D' . 显然, $D' = B' + C'$.

现在先证明

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}' \quad (2)$$

这是叉乘的一个基本的性质. 首先, 根据叉乘的几何定义^[149], $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 与 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}'$ 的方向相同. 另外

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \theta_{AB} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}'| = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}'| \quad (3)$$

所以二者模长也相等, 证毕.

同理有

$$\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}' \quad (4)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{D} = \mathbf{A} \times \mathbf{D}' \quad (5)$$

所以, 要证明

$$\mathbf{A} \times \mathbf{D} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (6)$$

只需要证明

$$\mathbf{A} \times \mathbf{D}' = \mathbf{A} \times \mathbf{B}' + \mathbf{A} \times \mathbf{C}' \quad (7)$$

即可.

由于 B', C', D' 都与 A 垂直, 所以 A 与之叉乘的效果相当于 B', C', D' 的模长分别乘以 $|A|$, 且绕 A 逆时针分别旋转 90° . 所以上式就是在说, 若已知 $B' + C' = D'$, 那么把它们分别乘以常数并旋转 90° 后这个加法仍然成立. 这是显然的. 证毕.

连续叉乘的化简

预备知识 矢量的叉乘^[149]

连续两个叉乘的化简也叫 BAC-CAB 定理

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1)$$

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{A} = \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \quad (2)$$

要证明这个定理可以将每个叉乘在各个基底上展开 (式 11^[149]).

习题 1

由叉乘的坐标定义 (式 11^[149]) 证明式 1.

这里对连续叉乘的几何意义略作说明, 可以用于理解该公式的结构. 以式 1 为例, 根据叉乘的几何意义我们知道 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ (命名为 \mathbf{D}) 方向垂直于 \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 所在平面. 又因为 $\mathbf{A} \times \mathbf{D}$ 垂直于 \mathbf{D} , 所以最终的矢量再次落到 \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 所在平面上, 所以等式右边是 \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 的线性组合.

下面来介绍一种简单的记忆方法, 括号外的矢量在哪边, 括号内靠近那边的矢量所在的项前面就是正号, 另一项前面则是负号, 如图 1 所示.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{A} = \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})$$

图 1: 三矢量叉乘的化简

三矢量的混合积

预备知识 矢量的叉乘^[149]

我们定义以下运算

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \quad (1)$$

为矢量 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 的混合积. 混合积满足

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \quad (2)$$

这个公式可由图 1 记忆. 图中箭头的方向由叉乘的方向 (顺时针或逆时针) 决

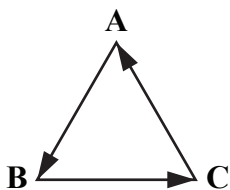


图 1: 式 2 记忆法

定, 与内积无关, 即 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$. 如果混合积的顺序取与箭头相反的方向, 根据叉乘的性质, 需要在前面加上负号 (叉乘不满足乘法交换律). 式 2 与式 3 互为相反数

$$(\mathbf{C} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B} \quad (3)$$

注意即使将混合积省略括号记为 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ 或者 $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 也应该理解为先叉乘后内积. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ 没有定义, 因为矢量不能叉乘标量.

几何法证明

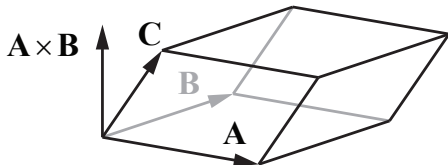


图 2: 矢量混合积的几何意义

如图 2, 以三个矢量为棱作平行六面体. 由例 1^[149] 可知 $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ 就是 \mathbf{A}, \mathbf{B} 所在平行四边形的面积. 令 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| \hat{\mathbf{n}}$, 则 $\hat{\mathbf{n}}$ 为平面的法向量, 平行

六面体的高为 $|\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{C}|$ ，所以平行六面体的体积等于底面积乘以高

$$V = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| |\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{C}| = |\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}| \quad (4)$$

同理可得对于同一平行六面体

$$V = |\mathbf{B} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}| = |\mathbf{C} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| \quad (5)$$

这里只证明了式 2 的绝对值，要证明正负号，定义 $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{C} < 0$ 时 V 为负值即可。

代数法证明

预备知识 行列式^[179]

不难证明三矢矢积若展开成分量的形式，等于三个矢量组成的行列式

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (6)$$

而利用行列式中任意两行置换符号改变，即可证明式 2。

第二章

矩阵和行列式

矩阵

预备知识 线性变换^[??]

本书中**矩阵**符号用加粗的正体字母来表示，而对应的**矩阵元**一般用斜体加行标和列标表示。例如矩阵 \mathbf{A} 的第 i 行第 j 列的**矩阵元**表示为 A_{ij} 。特殊地，行数等于列数的矩阵叫做**方阵**。只有一行的矩阵和只有一列的矩阵分别叫做**行向量**和**列向量**。

矩阵的转置

我们先定义矩阵的**对角线**是从左上角到右下角的所有矩阵元，即行标等于列标的所有矩阵元。则任意矩阵 \mathbf{A} 的**转置 (Transpose)** 记为 \mathbf{A}^T 。转置操作把 \mathbf{A} 的第 i 行变为 \mathbf{A}^T 的第 i 列，相当于把矩阵沿对角线翻转。即任意矩阵元满足

$$A_{ij}^T = A_{ji} \quad (1)$$

注意转置操作不影响对角线上的矩阵元。另外行向量转置后变为列向量，反之亦然。

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

为了排版方便，本书在正文中通常用 $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 表示列向量。

矩阵的乘法

矩阵最常见的运算是矩阵的乘法。线性变换^[??]

$$\begin{cases} y_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n \\ y_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_m = A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \dots + A_{mn}x_n \end{cases} \quad (3)$$

可用矩阵与列矢量的乘法表示为（有时候也会用方括号表示矩阵和矢量）

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

令列向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$, 系数矩阵为 \mathbf{A} , 上式可记为

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (5)$$

注意 \mathbf{A} 的列数必须和 \mathbf{x} 的行数相等. 由此可以定义矩阵乘以列矢量的运算规则: $m \times n$ 矩阵乘以 $n \times 1$ 列矢量会得到 $m \times 1$ 的列矢量. 要计算 y_i , 就用 $m \times n$ 矩阵的第 i 行的 n 个数和 $x_1 \dots x_n$ 分别相乘再相加, 即内积^[146]的代数定义

$$y_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j \quad (6)$$

若有 l 个不同的 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} , 第 k 个记为 $\mathbf{x}_k = (x_{1k}, \dots, x_{nk})^T$ 和 $\mathbf{y}_k = (y_{1k}, \dots, y_{mk})^T$, 对应的变换为

$$\begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix} \quad (7)$$

可以将所有的 \mathbf{x}_k 和 \mathbf{y}_k 分别横向拼成 $n \times l$ 和 $m \times l$ 的矩阵

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nl} \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{ml} \end{pmatrix} \quad (8)$$

现在把 l 组线性变换用一条式子表示为

$$\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{ml} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nl} \end{pmatrix} \quad (9)$$

由此，可以定义一般的矩阵乘法： $m \times n$ 的矩阵 \mathbf{A} 和 $n \times l$ 的矩阵 \mathbf{X} 相乘得到 $m \times l$ 的矩阵 \mathbf{Y} ， Y_{ij} 等于 \mathbf{A} 的第 i 行和 \mathbf{X} 的第 j 列内积。

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (10)$$

矩阵元公式为

$$Y_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}X_{kj} \quad (11)$$

再次注意两个相乘的矩阵，左边矩阵的列数必须等于右边矩阵的行数。我们可以用图 1 来记忆矩阵乘法。

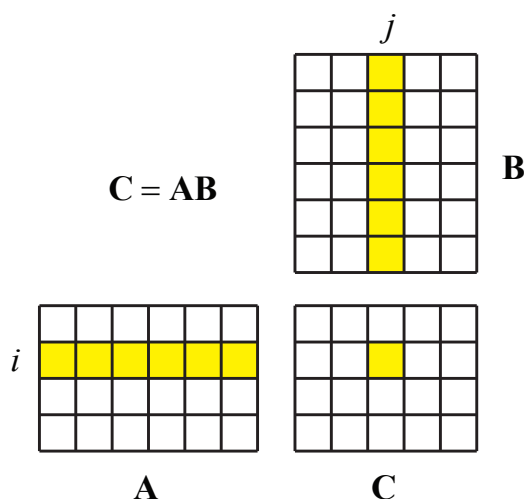


图 1: 矩阵乘法的示意图： \mathbf{C} 的 (i, j) 矩阵元等于 \mathbf{A} 的第 i 行和 \mathbf{B} 的第 j 列逐个元素相乘再相加

矩阵乘法一般不满足交换律，举一个反例：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

矩阵的乘法分配律

矩阵的乘法满足分配律

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C} \quad (13)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C} \quad (14)$$

令式 13 左边等于矩阵 \mathbf{D} ，则其矩阵元为

$$D_{ij} = \sum_k A_{ik}(B_{kj} + C_{kj}) \quad (15)$$

拆括号得

$$D_{ij} = \sum_k A_{ik}B_{kj} + \sum_k A_{ik}C_{kj} \quad (16)$$

而这恰好是 $\mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ 的矩阵元。证毕。式 14 的证明类似。

现在我们可以得出线性变换（式 5）的一个重要性质。对若干列矢量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$

$$\mathbf{A} \left(\sum_i c_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_i c_i \mathbf{A} \mathbf{v}_i \quad (17)$$

也就是说若干列矢量的线性组合的线性变换等于每个列矢量分别进行线性变换再进行同样的线性组合。

矩阵乘法的结合律

我们希望证明三个矩阵的乘法满足结合律

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \quad (18)$$

令

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \quad (19)$$

\mathbf{D} 的矩阵元为

$$D_{ij} = \sum_l A_{il}(BC)_{lj} = \sum_l A_{il} \left(\sum_k B_{lk}C_{kj} \right) \quad (20)$$

拆括号，得

$$D_{ij} = \sum_k \sum_l (A_{il}B_{lk}C_{kj}) \quad (21)$$

对 C_{kj} 进行合并同类项，得

$$D_{ij} = \sum_k \left(\sum_l A_{il}B_{lk} \right) C_{kj} \quad (22)$$

括号中恰好是 \mathbf{A} 乘以 \mathbf{B} 所得矩阵的矩阵元 $(AB)_{ik}$ 所以

$$D_{ij} = \sum_k (AB)_{ik} C_{kj} \quad (23)$$

即

$$\mathbf{D} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \quad (24)$$

证毕.

单位矩阵

单位矩阵就是对角线上的元素全为 1，非对角线上的元素全为 0 的方阵。通常记为通常记为 \mathbf{I} 。为了强调矩阵的维数 N ，也可记为 \mathbf{I}_N 。单位矩阵的矩阵元可用克罗内克 δ 函数 (??^[?]) 表示为

$$I_{ij} = \delta_{ij} \quad (25)$$

任何矩阵左乘或右乘单位矩阵，仍然得到矩阵本身。单位矩阵的转置仍为单位矩阵。

逆矩阵

记方阵 \mathbf{M} 的逆矩阵为 \mathbf{M}^{-1} ，且满足

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I} \quad (26)$$

其中 \mathbf{I} 是单位矩阵。也就是说，任意一个矩阵（或列矢量） \mathbf{A} 乘以矩阵 \mathbf{M} 再乘以其逆矩阵 \mathbf{M}^{-1} 仍然得到 \mathbf{A} 本身。

虽然矩阵乘法一般不满足交换律，但矩阵和对应的逆矩阵满足¹，即

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I} \quad (27)$$

逆矩阵 \mathbf{M}^{-1} 所代表的线性变换就是 \mathbf{M} 代表的线性变换的逆变换，令 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 为列矢量，如果有

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x} \quad (28)$$

¹这个定理暂时不证

那么我们在等式两边左乘 \mathbf{M}^{-1} 再把等式左右互换, 则上式变为

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} \quad (29)$$

要求逆矩阵, 一种简单直接但低效的方法就是先令 $\mathbf{y} = (1, 0, \dots)^T$, 代入?? 解线性方程组得 \mathbf{x} , 将 \mathbf{x}, \mathbf{y} 代入?? 可知 \mathbf{x} 就是 \mathbf{M} 的第一列, 再令 $\mathbf{y} = (0, 1, 0, \dots)^T$, 解线性方程组可得 \mathbf{M} 的第二列, 以此类推就可以得到完整的 \mathbf{M} .

叉乘的矩阵形式

预备知识 矢量叉乘^[149]

对任意矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} , 令

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (1)$$

该运算可以看作列矢量 \mathbf{b} 到列矢量 \mathbf{c} 的线性变换. 我们知道线性变换可以用矩阵表示, 所以必存在矩阵 \mathbf{A} , 满足

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{b} \quad (2)$$

令 \mathbf{a} 的坐标为 (a_x, a_y, a_z) , 根据叉乘的分量表达式 (式 12^[149]), 易得变换矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

这是一个反对称矩阵, 即 $A_{ij} = -A_{ji}$.

同理, 式 1 也可以看作是 \mathbf{a} 到 \mathbf{c} 的线性变换

$$\mathbf{c} = \mathbf{B}\mathbf{a} \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_z & -b_y \\ -b_z & 0 & b_x \\ b_y & -b_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

这恰好与式 3 符号相反.

矩阵的迹

预备知识 相似变换和相似矩阵^[178]

定义 1 矩阵的迹

令域 \mathbb{F} 上的 N 维方阵 \mathbf{A} 的矩阵元为 $a_{ij} \in \mathbb{F}$, 它的迹 (**trace**) 定义为对角线上矩阵元之和

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^N a_{ii} \quad (1)$$

矩阵的迹是刻画矩阵性质的一个量, 它的优点在于满足以下一些性质, 从而成为了分析矩阵的变换的利器.

性质

定理 1 线性

矩阵的求迹操作是线性的, 即对于域 \mathbb{F} 上的方阵 \mathbf{A} , \mathbf{B} 和域中元素 c_1, c_2 , 有

$$\operatorname{tr}(c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B}) = c_1 \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + c_2 \operatorname{tr}(\mathbf{B}) \quad (2)$$

证明留作练习.

定理 2 交换性

矩阵乘法的迹满足 (\mathbf{A} 和 \mathbf{B} 不必是方阵, 但要求乘积是方阵. 注意 \mathbf{AB} 的尺寸和 \mathbf{BA} 未必相同)

$$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA}) \quad (3)$$

证明: 令式 3 中 \mathbf{A} 为 $M \times N$ 的矩阵, \mathbf{B} 为 $N \times M$ 的矩阵

$$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{ki} = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N b_{ki} a_{ik} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M b_{ik} a_{ki} = \operatorname{tr}(\mathbf{BA}) \quad (4)$$

证毕.

定理 3

相似矩阵的迹相等.

证明：根据交换性式 3

$$\operatorname{tr}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A})$$

证毕.

定理 4

矩阵的迹等于它的所有 N 个本征值 λ_i 相加，如果某个本征值有 n 重简并，就视为 n 个本征值

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^N \lambda_i \quad (5)$$

习题 1

对于矩阵 \mathbf{A} ，若记其转置为 \mathbf{A}^T ，共轭为 $\overline{\mathbf{A}}$ ，厄米共轭为 \mathbf{A}^\dagger ，那么有：

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}^T) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}), \quad \operatorname{tr}(\overline{\mathbf{A}}) = \overline{\operatorname{tr}(\mathbf{A})} \quad (6)$$

由此可得推论： $\operatorname{tr}(\mathbf{A}^\dagger) = \operatorname{tr}(\overline{\mathbf{A}^T}) = \overline{\operatorname{tr}(\mathbf{A})}$.

例 1

$\operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger) = 0$ 当且仅当 $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 0$.

矩阵的迹的应用实例

习题 2

对于域 \mathbb{C} 上的方阵 \mathbf{A} ，如果 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger$ ，求证 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$.

提示：使用例 1 的结论，证明 $\mathbf{A} - \mathbf{A}^\dagger = 0$ 即可.

矩阵的秩

预备知识 行列式^[179]

我们定义矩阵的**列秩**等于其线性无关的列数，**行秩**等于线性无关的行数。可以证明^[166]，对于任意尺寸的矩阵，二者是相同的，所以简称为矩阵的**秩**。

根据定义，一个矩阵的秩必定小于或等于矩阵的行数以及列数（取较小者）。对于方阵，若三者相等，我们就称其为**满秩矩阵**。判断满秩矩阵的一种常

用方法时计算矩阵的行列式，若结果不为零，则矩阵是满秩的，否则不是（定理 7 [182]）。注意非满秩的情况下行列式并不能判断秩具体是多少。

高斯消元法计算秩

预备知识 高斯消元法 [187]

要确定任意矩阵秩的大小，我们可以先用高斯消元法将矩阵变换为梯形矩阵。矩阵的秩数就是梯形矩阵中不为零的行数。这是因为，行变换并不会改变秩，而梯形矩阵中不为零的行都是线性无关的。

证明矩阵行秩等于列秩

预备知识 矩阵与向量空间 [??]，正交子空间 [??]

我们从向量空间的角度 [??] 证明，假设矩阵 A 的尺寸为 $N_Y \times N_X$ ，也分别是 Y 空间和 X 空间的维数。

定义 X 空间中满足 $A|x) = 0$ 的子空间为 X 的零空间，记为 X_0 。 Y 空间中满足 $A^\dagger|y) = 0$ 的子空间为 Y 的零空间，记为 Y_0 。定义整个 X 空间通过 A 映射后得到 Y 的另一个子空间为 Y_1 空间，即 $A(X) = Y_1$ ，同理定义 $A^\dagger(Y) = X_1$ 。

可以证明（见下文） X_0 与 X_1 正交且 Y_0 与 Y_1 正交 [??]，且

$$X_0 \oplus X_1 = X \quad Y_0 \oplus Y_1 = Y \quad (1)$$

于是我们可以在 X 和 Y 空间中分别找到一套正交归一基底，每套又根据两个子空间分为两组。计算 $A(X)$ 时， X_0 中的基底映射后还是零，所以其中的基底可以去掉，只剩下 X_1 中的基底做映射， $A^\dagger(Y)$ 也同理。

$$A(X_1) = Y_1 \quad A^\dagger(Y_1) = X_1 \quad (2)$$

线性映射后的空间维度总是小于等于映射前的维度，所以如果两个方向都存在映射，就只能是等于。所以 X_1 和 Y_1 的维度相同，即 A 和 A^\dagger 线性无关的列数相同，即 A 线性无关的行数和列数相同，即行秩等于列秩。证毕。

补充证明

以下证明 Y_0 和 Y_1 正交以及式 1 中的第二条. 第一条同理可得.

我们先在 Y_1 中找到一套 N_{Y_1} 个正交归一基底 $|y_{1i}\rangle$, 再在 Y 空间中找到剩下 $N_Y - N_{Y_1}$ 个正交归一基底 $|y_i\rangle$. 对任意 $|x\rangle \in X$, 有 $A|x\rangle \in Y_1$, 所以

$$\langle y_i | A|x\rangle = 0 \quad (3)$$

对两边做厄米共轭得

$$\langle x | A^\dagger |y_i\rangle = 0 \quad (4)$$

对任意 $|x\rangle$ 都成立, 所以

$$A^\dagger |y_i\rangle = 0 \quad (5)$$

所以 $|y_i\rangle \in Y_0$. 然而对于任意 $|y_1\rangle \in Y_1$, 必存在一些矢量 $|x\rangle$ 使

$$\langle y_1 | A|x\rangle \neq 0 \iff \langle x | A^\dagger |y_1\rangle \neq 0 \quad (6)$$

所以

$$A^\dagger |y_1\rangle \neq 0 \quad (7)$$

即 $|y_1\rangle \notin Y_0$. 所以 $|y_i\rangle$ 就是 Y_0 的 (完备) 正交归一基底, 且与 $|y_{1i}\rangle$ 组成 Y 的完备正交归一基底. 证毕.

平面旋转矩阵

预备知识 矩阵^[158]

平面旋转变换^[22] 属于线性变换, 可以用矩阵 \mathbf{R}_2 表示. 虽然我们可以直接把变换写成矩阵乘以列矢量的形式, 但这里我们用另一种方法推导一次, 能更好地帮助理解和记忆.

已知单位矢量 $\hat{x} = (1, 0)^T$, $\hat{y} = (0, 1)^T$ 逆时针旋转 θ 为

$$\mathbf{R}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1)$$

要求任意矢量 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ 的旋转矩阵, 可以将 \mathbf{v} 表示成 $\hat{\mathbf{x}}$ 和 $\hat{\mathbf{y}}$ 的线性组合 (式 6^[141]) $\mathbf{v} = v_1\hat{\mathbf{x}} + v_2\hat{\mathbf{y}}$. 由式 17^[158], 该线性组合的旋转变换等于 $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ 分别做旋转变换再做同样的线性组合, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2(v_1\hat{\mathbf{x}} + v_2\hat{\mathbf{y}}) &= v_1\mathbf{R}_2\hat{\mathbf{x}} + v_2\mathbf{R}_2\hat{\mathbf{y}} \\ &= v_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

所以旋转矩阵为

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3)$$

这与平面旋转变换^[?]得出的结果一致.

把这个推导推广到一般情况, 就是如果已知每个基底 β_i 的线性变换 (记变换矩阵为 \mathbf{A}) 结果为 $\alpha_i = \mathbf{A}\beta_i$, 那么变换矩阵的第 i 列就是第 i 个列矢量 α_i .

主动和被动理解

我们将任意矢量 \mathbf{v} 的旋转变换记为 $\mathbf{u} = \mathbf{R}_2\mathbf{v}$, 我们把 \mathbf{v} 看做是二维空间中某矢量关于基底 $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ 的坐标. 若我们把 \mathbf{u} 看做是另一矢量关于 $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ 的坐标, 那么 $\hat{\mathbf{u}}$ 就等于 $\hat{\mathbf{v}}$ 逆时针旋转 θ 角. 旋转矩阵的这种理解被称为**主动的**.

另一种可能的理解是, \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 代表二维空间中的同一矢量关于不同基底的展开. 我们把 \mathbf{u} 使用的基底记为 $\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2$, \mathbf{v} 使用的基底记为 $\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2$. 我们有

$$u_1\hat{\mathbf{u}}_1 + u_2\hat{\mathbf{u}}_2 = v_1\hat{\mathbf{v}}_1 + v_2\hat{\mathbf{v}}_2 \quad (4)$$

将 \mathbf{R}_2 的矩阵元记为 R_{ij} , 不难证明两组基底之间的关系为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{v}}_1 = R_{11}\hat{\mathbf{u}}_1 + R_{21}\hat{\mathbf{u}}_2 \\ \hat{\mathbf{v}}_2 = R_{12}\hat{\mathbf{u}}_1 + R_{22}\hat{\mathbf{u}}_2 \end{cases} \quad (5)$$

将矩阵元代入可知, 基底 $\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2$ 分别是基底 $\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2$ 顺时针旋转 θ 角所得. 我们把这种理解叫做**被动的**, 即旋转矩阵表示同一个矢量的**基底变换**.

逆矩阵

我们既可以使用平面旋转变换^[167]中求逆变换的方法把 θ 变为 $-\theta$ 再化简求出 \mathbf{R}_2 的逆矩阵，也可以通过解方程求逆矩阵（式 28）。但最方便的是，由于 \mathbf{R}_2 是一个单位正交阵，我们只需要把矩阵转置即可得到逆矩阵。

$$\mathbf{R}_2^{-1} = \mathbf{R}_2^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6)$$

三维旋转矩阵

预备知识 平面旋转矩阵^[167]，自由度^[249]

类比平面旋转矩阵^[167]，空间旋转矩阵是三维坐标的旋转变换，所以应该是 3×3 的方阵。不同的是平面旋转变换只有一个自由度 θ ，而空间旋转变换除了转过的角度还需要考虑转轴的方向，三维空间中的方向有两个自由度，所有三维旋转矩阵共有 3 个自由度。

若已经知道空间直角坐标系中三个单位正交矢量

$$\hat{\mathbf{x}} = (1, 0, 0)^T \quad \hat{\mathbf{y}} = (0, 1, 0)^T \quad \hat{\mathbf{z}} = (0, 0, 1)^T \quad (1)$$

经过三维旋转矩阵变换以后变为另外三个正交归一矢量，令坐标变为

$$(a_{11}, a_{21}, a_{31})^T \quad (a_{12}, a_{22}, a_{32})^T \quad (a_{13}, a_{23}, a_{33})^T \quad (2)$$

类比平面旋转矩阵^[167]，可以得到旋转矩阵为

$$\mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (3)$$

这 9 个矩阵元只有 3 个是独立的，因为我们有 6 个条件：每个列矢量模长等于 1（3 个等式），且两两间正交（3 个等式）。

除了通过三个单位矢量构建旋转矩阵，我们可以通过由转轴的方向和旋转的角度来计算每个矩阵元，参考“绕轴旋转矩阵^[172]”和“四元数^[175]”。

逆矩阵

如果我们把式 2 中的三个正交归一基底记为

过渡矩阵

预备知识 矢量空间的表示^[2]

过渡矩阵

给定域 \mathbb{F} 上的 n 维矢量空间 V . 如果 V 有两个基 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1}^n$, 那么由于各 \mathbf{e}'_j 也是 V 中的元素, 故可以表示成 $\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\mathbf{e}_i$, 因此我们可以把矢量也当作矩阵元素, 写出以下矩阵等式:

$$(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

矩阵 $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix}$ 就被称为基 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ 到基 $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1}^n$ 的一个过

渡矩阵 (transition matrix).

例 1

证明: 过渡矩阵必须是可逆矩阵.

过渡矩阵和基的变换

过渡矩阵本身是表示基之间的变换的, 但它也可以用来表示两个不同的基下各种表示的变换, 比如向量的坐标、线性变换的矩阵等.

不同基下坐标的变换

如果在基 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ 中, 向量 \mathbf{v} 的坐标是列向量 $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$, 那么就有

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

同样地, 如果在基 $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1}^n$ 中, \mathbf{v} 的坐标是列向量 $\mathbf{c}' = (c'_1, \dots, c'_n)^T$, 则也有

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n) \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

考虑到 $\mathbf{v} = \mathbf{v}$, 联立式 1, 式 2 和式 3 即可得到:

$$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

式 4 也可以简单记为 $\mathbf{Q}\mathbf{c}' = \mathbf{c}$, 或者 $\mathbf{c}' = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}$.

不同基下线性变换的矩阵的变换

设 T 是 V 上的一个线性变换, 基 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ 到 $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1}^n$ 的过渡矩阵是 \mathbf{Q} . 向量 \mathbf{v} 在基 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1}^n$ 下的坐标分别是 \mathbf{c} 和 \mathbf{c}' , 而 T 的矩阵分别是 \mathbf{M} 和 \mathbf{M}' .

$T\mathbf{v}$ 在基 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1}^n$ 下的坐标就分别是 $\mathbf{M}\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{M}'\mathbf{c}'$. 由坐标的变换可知, $\mathbf{Q}\mathbf{M}'\mathbf{c}' = \mathbf{M}\mathbf{c}$, 即 $\mathbf{M}'\mathbf{c}' = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{c}$.

又因为 $\mathbf{Q}\mathbf{c}' = \mathbf{c}$, 故有 $\mathbf{M}'\mathbf{c}' = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Q}\mathbf{c}$.

也就是说, 如果在基 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ 下, 线性变换 T 的矩阵是 \mathbf{M} , 那么在基 $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1}^n$ 下, T 的矩阵应该是 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Q}$.

由此可见, 矩阵的相似变换就是同一个线性变换在不同基下的矩阵之间的变换.

绕轴旋转矩阵

预备知识 空间旋转矩阵^[169], 圆周运动的速度^[203]

直角坐标系中, 某点 $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ 以单位矢量 $\hat{\mathbf{A}} = (A_x, A_y, A_z)^T$ 为轴按右手定则转动 θ 角得到的点 $\mathbf{r}' = (x', y', z')^T$ 可用矩阵乘法计算

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}_\theta \mathbf{r} \quad (1)$$

其中 \mathbf{R}_θ 为绕轴旋转矩阵

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} aA_x^2 + c & aA_xA_y - sA_z & aA_xA_z + sA_y \\ aA_yA_x + sA_z & aA_y^2 + c & aA_yA_z - sA_x \\ aA_zA_x - sA_y & aA_zA_y + sA_x & aA_z^2 + c \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中

$$c = \cos \theta \quad s = \sin \theta \quad a = 1 - \cos \theta \quad (3)$$

事实上, 数学上更规范的做法是用四元数^[175]表示该矩阵.

推导

推导的思路是用 $\hat{\mathbf{A}}$, \mathbf{r} 和 θ 三个已知量经过数乘, 内积^[146]和叉乘^[149]三种运算, 表示出旋转后的矢量 \mathbf{r}' , 再拆成三个分量, 即可得到线性变换, 进而写出矩阵. 注意该思路与推导平面旋转矩阵^[167]的思路不一样.

如图, \mathbf{r} 绕单位矢量 $\hat{\mathbf{A}}$ 旋转 θ 角后得到 \mathbf{r}' . \mathbf{r} 在 $\hat{\mathbf{A}}$ 方向投影得到的矢量为

$$\mathbf{r}_3 = (\hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{A}} \quad (4)$$

在与 $\hat{\mathbf{A}}$ 垂直方向的分量为

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_3 \quad (5)$$

为了构成一组正交基底, 令

$$\mathbf{r}_2 = \hat{\mathbf{A}} \times \mathbf{r}_1 \quad (6)$$

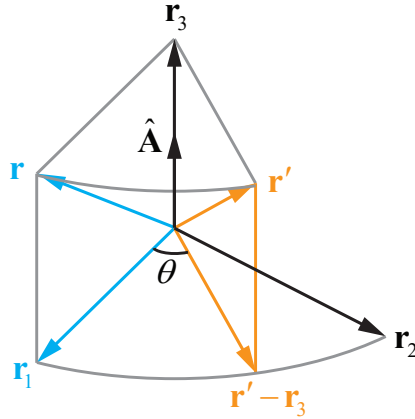


图 1: 绕轴旋转矩阵的推导

则 \mathbf{r}_2 相当于 \mathbf{r}_1 绕 $\hat{\mathbf{A}}$ 旋转 90° . 现在有了正交的 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 就可以表示出 \mathbf{r}_1 绕 $\hat{\mathbf{A}}$ 旋转 θ 角后的结果

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \cos \theta + \mathbf{r}_2 \sin \theta \quad (7)$$

即

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1 \cos \theta + \mathbf{r}_2 \sin \theta + \mathbf{r}_3 \quad (8)$$

将式 4 式 5 式 6 代入式 8, 即可求出 \mathbf{r}' 关于 $\hat{\mathbf{A}}, \mathbf{r}$ 和 θ 的矢量表达式. 把结果写成分量的形式, 化简可得到 x', y', z' 关于 x, y, z 的线性变换与系数矩阵^[158].

由旋转矩阵推导出匀速圆周运动的线速度

我们可以用旋转矩阵得到 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (式 5^[203]), 这也验证了旋转矩阵的正确性.

在无穷小的时间 t 内, 点 P 绕轴转过 θ 角, 则 $\theta = \omega t \rightarrow 0$, 此时有 $\sin \theta \rightarrow \theta$ 和 $\cos \theta \rightarrow 1$. 旋转矩阵变为

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & -A_z \theta & A_y \theta \\ A_z \theta & 1 & -A_x \theta \\ -A_y \theta & A_x \theta & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

下面 \mathbf{R}_θ 乘以某点的列矢量, 得到变换后的坐标, 再减掉变换前的坐标, 得位

移矢量 \mathbf{s}

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s} &= \mathbf{v}t \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -A_z\theta & A_y\theta \\ A_z\theta & 1 & -A_x\theta \\ -A_y\theta & A_x\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 &= \theta \begin{pmatrix} 0 & -A_z & A_y \\ A_z & 0 & -A_x \\ -A_y & A_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 &= \theta \hat{\mathbf{A}} \times \mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega}t) \times \mathbf{r}
 \end{aligned} \tag{10}$$

两边除以 t , 得 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

旋转矩阵的导数

预备知识 圆周运动的速度^[203], 瞬时转轴^[292], 叉乘的矩阵形式^[163], 旋转矩阵^[169]

我们来证明含参数 t ² 的旋转矩阵 $\mathbf{R}(t)$ 的导数 $\dot{\mathbf{R}}$ 满足

$$\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{R} \tag{1}$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

其中 $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 是旋转的瞬时转轴的坐标³.

证明

我们可以把一个任意的不随 t 变化的列矢量 \mathbf{r}_0 旋转得

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{r}_0 \tag{3}$$

² t 不一定表示时间, 可以是任意参数

³如果使用主动理解, 即旋转矩阵将同一个坐标系中的一个矢量旋转后得到另一个矢量. 如果使用被动理解, 即旋转矩阵将同一个矢量在两个坐标系之间进行变换, 则矢量 $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 取反方向即可

关于 t 求导得

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{r}_0 \quad (4)$$

令列矢量 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$, 由式 5 [203] 得

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (5)$$

将叉乘表示为矩阵乘法 (式 2 [163]) 得

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{r} \quad (6)$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

将式 3 代入式 6 右边, 再对比式 4, 可得式 1. 证毕.

四元数与旋转矩阵

预备知识 绕轴旋转矩阵 [172], 旋转矩阵的导数 [174], 四元数 [??]

我们可以用四元数 (quaternions) $\mathbf{q} = [s, \mathbf{v}]$ 来表示绕轴旋转矩阵, 其中

$$s = \cos(\theta/2) \quad v = |\mathbf{v}| = \sin(\theta/2)\hat{\mathbf{A}} \quad (1)$$

则绕轴旋转矩阵可以表示为

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 - 2v_y^2 - 2v_z^2 & 2v_xv_y - 2sv_z & 2v_xv_z + 2sv_y \\ 2v_xv_y + 2sv_z & 1 - 2v_x^2 - 2v_z^2 & 2v_yv_z - 2sv_x \\ 2v_xv_z - 2sv_y & 2v_yv_z + 2sv_x & 1 - 2v_x^2 - 2v_y^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

四元数的乘法运算可以表示两个旋转矩阵相乘, 即把两次旋转合并为一次旋转

$$[s_1, \mathbf{v}_1][s_2, \mathbf{v}_2] = [s_1s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, s_1\mathbf{v}_2 + s_2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2] \quad (3)$$

若从坐标系 B 到坐标系 A 的基底变换矩阵为 \mathbf{R} , 当 B 绕原点以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转时有

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{R} \quad (4)$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}$ 乘以任意位置矢量 \mathbf{r} 等于 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

若旋转矩阵 \mathbf{R} 对应的四元数为 \mathbf{q} , 则

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{2}[0, \boldsymbol{\omega}(t)]\mathbf{q}(t) \quad (6)$$

矩阵的本征方程

预备知识 线性方程组与矢量空间^[192], 子空间^[?]

若已知矩阵 \mathbf{A} , 我们把线性方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (1)$$

称为矩阵 \mathbf{A} 的**本征方程**. 式中 \mathbf{A} 是已知的, 而 λ 和 \mathbf{v} 是未知的. 显然, 当 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 时方程恒成立, 所以我们通常只对非零解感兴趣. 也就是说, 我们希望找到一些非零矢量 \mathbf{v} , 使得矩阵 \mathbf{A} 乘以该矢量以后方向不变⁴. 对于每个这样的矢量, 我们用一个标量 λ 来描述其模长的改变. 我们把这些矢量叫做**本征矢量**, 把对应的 λ 叫做**本征值**.

若令 \mathbf{I} 为 $N \times N$ 的单位矩阵⁵, 则本征方程本质上是一个齐次方程组

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (2)$$

⁴ “方向”只是从几何矢量中沿用过来的一个习惯说法, 注意式 1 中的所有量都可以是复数. 两个矢量方向相同意味着一个矢量乘以标量可以得到另一个.

⁵即对角线上的元为 1, 其他元为 0, 见“矩阵^[158]”

括号中的矩阵相当于把矩阵 \mathbf{A} 的对角线上的元都减去 λ 得到的方阵. 要确保方程有非零解, 只需令系数矩阵 $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ 不是满秩的, 即行列式为零

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \quad (3)$$

这是一个关于 λ 的 N 阶多项式, 必有 N 个复数根 (包括重根), 记为 λ_i ($i = 1, 2, \dots, N$). 将它们依次代入式 2, 就可以分别解出对应的本征矢. 考虑到式 2 是一个齐次方程, 所以 $\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}$ 的零空间中所有矢量都是本征矢, 且零空间至少是一维的. 我们把这个空间叫做 λ_i 的本征矢空间, 是 \mathbf{v} 所在的矢量空间的子空间.

令 λ_i 的本征矢空间的维度是 n_i , 若 $n_i = 1$, 我们说 λ_i 是非简并的, 若 $n_i > 1$ 就说 λ_i 是 n_i 重简并的, 把 n_i 叫做简并数.

对称矩阵的本征问题

预备知识 对称矩阵^[?], 矩阵的本征方程^[176]

在物理中, 我们遇到的本征问题中的矩阵往往是对称矩阵或厄米矩阵. 我们下面来证明 N 维对称矩阵 \mathbf{A} 存在 N 个两两正交归一的本征矢 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$, 且本征值都是实数. 另外, 本征矢一般用实数表示, 但也可以乘以一个任意复数.

证明本征值为实数

本征方程为

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i \quad (1)$$

我们先假设本征值和本征矢都可能是复数, 将本征方程左边乘以 \mathbf{v}_i^\dagger 得

$$\mathbf{v}_i^\dagger\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i^\dagger\mathbf{v}_i \quad (2)$$

将等式两边取厄米共轭 (注意矢量也可以看成矩阵), 由??^[?] 和??^[?] 可得

$$\mathbf{v}_i^\dagger\mathbf{A}^T\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^\dagger\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i^*\mathbf{v}_i^\dagger\mathbf{v}_i \quad (3)$$

对比两式, 得 $\lambda_i = \lambda_i^*$, 所以 λ_i 必为实数.

将本征方程记为

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad (4)$$

就会发现这是一个实系数的齐次方程组，所以必然能把所有线性无关的解都用实数矢量表示。但注意把任意解 \mathbf{v}_i 乘以一个任意复数，同样也是方程的解。

证明本征矢的正交性

简并空间内，我们可以认为地指定正交归一基底，所以只需要证明不同本征值对应的本征矢正交即可。

$$s = \mathbf{v}_1^T (\mathbf{A} \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1^T (\lambda_2 \mathbf{v}_2) = \lambda_2 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 \quad (5)$$

使用矩阵乘法结合律式 18 [158] 以及?? [??] 得

$$s = (\mathbf{A} \mathbf{v}_1)^T \mathbf{v}_2 = \lambda_1^* \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = \lambda_1 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 \quad (6)$$

以上两矢相等，因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ，所以 $\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = 0$ 。

事实上，厄米矩阵也可以定义为满足

$$\mathbf{v}_1^T (\mathbf{A} \mathbf{v}_2) = (\mathbf{A} \mathbf{v}_1)^T \mathbf{v}_2 \quad (7)$$

的矩阵。

相似变换和相似矩阵

预备知识 酉矩阵 [??]

定义 1 相似变换

令 \mathbf{U} 为 N 维酉矩阵。 N 维方阵 \mathbf{A} 的相似变换为

$$\mathbf{B} = \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^\dagger \quad (1)$$

注意酉矩阵满足 $\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1}$ 。

由于酉矩阵乘以酉矩阵还是酉矩阵，多次相似变换可以看作一次相似变换。

对角化

预备知识 厄米矩阵的本征问题^[?]

若相似变换可以使矩阵变为对角矩阵，我们把这个过程称为对角化。
一个 N 维矩阵可以被对角化当且仅当它是（实）对称矩阵或厄米矩阵。

$$\mathbf{U}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} \quad (2)$$

对角化后，对角矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 的对角元就是矩阵 \mathbf{A} 的本征值 λ_i ， \mathbf{U} 的第 i 列矢量就是 λ_i 对应的本征矢。所以我们时常把“对角化”作为“解矩阵的本征方程”的同义词。

（未完成）

例 1 由本征值和本征矢求矩阵

已知本征方程

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad (3)$$

的 N 个本征值和本征矢为 λ_i 和 \mathbf{v}_i ，求矩阵 \mathbf{A} 。

把式 2 两边分别左乘 \mathbf{U} ，右乘 \mathbf{U}^\dagger ，得

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^\dagger \quad (4)$$

行列式

预备知识 矩阵^[158]，线性相关^[141]

行列式是线性代数中的一个重要工具，常用于解线性方程组或者判断方阵中的所有列矢量（或行矢量）是否线性无关。行列式运算的结果是一个数，若结果不为零，则线性无关，否则线性相关。物理中经常出现的是二阶和三阶行列式，我们先介绍它们的性质，然后介绍高阶的情况。

令二维方阵 \mathbf{A} 第 i 行第 j 列的矩阵元为 $a_{i,j}$ ，其行列式为

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1)$$

三维方阵 \mathbf{A} 的行列式为⁶

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{pmatrix} \quad (2)$$

我们经常把行列式中的数表叫做**矩阵**^[158]，但本文并不涉及矩阵的性质和运算。若将矩阵记为 \mathbf{A} ，则 \mathbf{A} 的行列式记为 $|\mathbf{A}|$ 。

几何理解

预备知识 右手定则^[13]

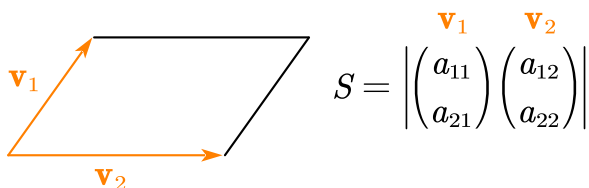


图 1: 二阶行列式的绝对值对应平行四边形的面积

如图 1，二阶行列式的绝对值对应平行四边形的面积（可以认为是二维空间中的“体积”），若把行列式的两列看成两个几何矢量的坐标，他们就是平行四边形的两条边。当 \mathbf{v}_1 逆时针转动⁷得到 \mathbf{v}_2 时，行列式的值为正，反之为负。

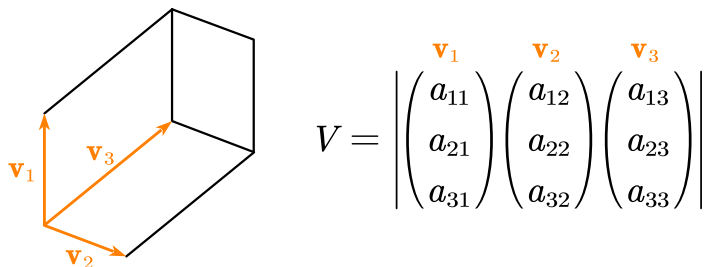


图 2: 三阶行列式对应平行四面体的体积

⁶括号中的内容是一行

⁷假设转动角度小于 180° ，下同。

如图 2，二阶行列式代表一个平行四面体的体积，若把行列式的 3 列看成 3 个几何矢量的坐标，他们就是平行四面体的 3 条边。若 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 的位置关系与 x, y, z 轴的关系相似（符合右手定则^[13]）则行列式的值为正，反之为负。

习题 1

请证明二阶行列式对应平行四边形的面积，三阶行列式对应平行四面体的体积

以上两个结论也可以拓展到更高维的情况，即 N 阶行列式表示 N 维空间中平行体的体积。但由于我们还没严格定义高维空间中的体积，先不展开。

另外，以后我们会看到行列式转置（即 a_{ij} 变为 a_{ji} ）以后不影响它的值，所以我们可以把每行看成是平行体一条边的坐标。

未完成：另外添加证明词条

高阶行列式的定义

N 阶行列式（ N 为正整数⁸）共有 $N!$ 项，每一项都是 N 个矩阵元的乘积⁹。每一项中的 N 个矩阵元的行数和列数各不相同，我们既可以在每一项中按照行标来排序，也可以按照列标，我们选用前者。排序后，行列式展开后的任意一项可记为（先不考虑前面的 \pm 号）

$$\prod_{i=1}^N a_{i, P_n(i)} = a_{1, P_n(1)} \cdot a_{2, P_n(2)} \cdots \quad (3)$$

其中列标 $P_n(i)$ 是数列 $1, 2, \dots, N$ 置换（用某种顺序排列）后的第 i 个数，显然该数列共有 $N!$ 种不同的排列，这里用 n 表示第 n 种排列，也表示行列式展开的第 n 项。

现在来考虑式 3 前面的 \pm 号。这由 P_n 的逆序数决定，逆序数的定义为

$$\sum_{i=2}^N \text{满足 } P_n(i) < P_n(j) \text{ (} j < i \text{) 的个数} \quad (4)$$

⁸一阶行列式定义为 $|a_{11}| = a_{11}$ ，虽然几乎从不被使用

⁹高阶行列式的计算较为复杂，可通过数学软件计算，详见 Matlab, Mathematica 和 Wolfram Alpha 的计算方法。

若逆序数为偶数，则前面加正号，奇数则加负号。若根据 P_n 对应的符号定义数列 S_n （取值 1 或 -1 ），则 N 阶行列式的公式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{n=1}^{N!} S_n \prod_{i=1}^N a_{i,P_n(i)} \quad (5)$$

行列式的性质

预备知识 行列式^[179]

以下是行列式常见的性质，我们从定义出发容易一一证明。由于行列式的绝对值表示体积，我们也可以从几何上理解这些定理。

定理 1

若行列式中某行或某列全为 0，其结果等于 0。

证明：根据定义（式 5^[179]），行列式展开后，相加的每一项都含有每一行（或每一列）的一个元素，所以当某列全为 0，则结果为 0。

几何理解：若平行体的某条边长等于 0，其体积也等于 0。

定理 2

矩阵的任意一列（或任意一行）乘以常数，行列式的值也要乘以该常数。

证明：思路和定理 1 的证明一样，行列式展开后，相加的每一项都含有每一行（或每一列）的一个元素，所以当某列全部元素乘以常数，则相加的每一项都乘以该常数。

几何理解：将平行体任意一条边长乘以一个常数，它的体积也需要乘以该常数。

定理 3

将行列式的两列交换，结果取相反数。

证明：根据行列式的定义，交换两行或两列会给展开后的每一项增加一个逆序数，导致行列式的值取相反数。

定理 4

若将行列式的某行或某行的每一个元素都表示为两个数之和，那么它就可以表示为两个行列式相加：

$$\begin{vmatrix}
 a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 b_{i,1} + c_{i,1} & b_{i,2} + c_{i,2} & \cdots & b_{i,N} + c_{i,N} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,N}
 \end{vmatrix}
 =
 \begin{vmatrix}
 a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 b_{i,1} & b_{i,2} & \cdots & b_{i,N} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,N}
 \end{vmatrix}
 +
 \begin{vmatrix}
 a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 c_{i,1} & c_{i,2} & \cdots & c_{i,N} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,N}
 \end{vmatrix}
 \quad (1)$$

列的情况也同理。

证明：行列式展开后，相加的每一项都含有每一行（或每一列）的一个元素，所以显然成立。

几何理解：若把平行体的一条边变为两条折线，那么可以作出两个叠加的平行体，体积之和等于原来的体积。

定理 5

把矩阵的第 i 行（列）叠加上“第 j 行（列）乘任意常数 λ ”，行列式的值不变。

证明：根据定理 4 和定理 2，我们可以把这样操作后的行列式拆分为两个行列式，第一个与原来相同；第二个在原来的基础上把第 i 行替换为第 j 行，再把行列式的值乘以 λ 。而第二个行列式由于存在两行相同，结果为 0。

几何理解：以平行四边形为例，由于其体积是底乘以高，令 \mathbf{v}_1 为底， \mathbf{v}_2 在垂直于 \mathbf{v}_1 方向的投影为高，则将 \mathbf{v}_2 变为 $\mathbf{v}_2 + \lambda\mathbf{v}_1$ （ λ 为常数）后高不变，所以面积不变。高维情况同理。

定理 6

若行列式中的行矢或列线性相关，行列式的值为 0。

线性相关意味着存在某一行 i ，可以表示为其他行的线性组合。那么我们可以通过将其他行依次乘以常数，然后加到第 i 行上，使得第 i 行全为 0。根据定理 5，这么做不改变行列式的值，而根据式 1，行列式的值为 0。

几何理解：二维情况下两向量线性相关意味着他们共线，平行四边形面积为 0。三维情况下线性相关意味着三个向量共面，平行四面体体积为 0。高维情况也可类比。

定理 7

行列式的值为 0 当且仅当行列式中存在线性相关的列。

定理 8

矩阵转置（将所有 $a_{i,j}$ 与 $a_{j,i}$ 交换^[158]）后行列式的值不变。

这个定理没有显然的几何理解，可以直接用代数定义证明（式 1 和式 2，以及下文的式 5）。根据这个定理，以上凡是涉及到“行”的定理和说明，都可以替换为“列”，请读者自行回顾一次。

拓展

行列式的代数性质可以抽象为外代数（见?? 以及例子后的解释），进而用于定义外微分^[?]，描述微分形式的代数性质。

行列式与体积

预备知识 行列式的性质^[182]

在“行列式^[179]”中我们看到了二阶和三阶行列式从几何上分别对应平行四边形的面积（即二维体积）和平行六面体的体积。我们现在来证明 $N > 0$ 维空间的情况。

我们先来看最简单的例子：一个对角线¹⁰元素都为 1，其他元素为零的行

¹⁰行列式或矩阵的对角线特指所有行标和列标相同的元素

列式

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (1)$$

这代表 N 维空间中边长都是 1 的立方体的体积.

N 维空间中的任意平行体都可以由该立方体经过两个操作 (包括任意次序多次操作) 得到. 一个是将某条边长乘以常数 λ (可以为负), 第二个是将某条边所在的矢量乘以常数 λ 然后加到另一条边上. 前者使体积乘以 $|\lambda|$, 后者保持体积不变.

如果我们把行列式的每一行 (或每一列, 下同) 对应到平行体的每条边, 那么根据[定理 2](#) ^[182] 和[定理 5](#) ^[182], 前者同样使行列式的值乘以常数 λ , 后者同样保持行列式的值不变. 从立方体开始所以经过一系列变换后, 行列式的绝对值同样表示对应平行体的体积.

第三章

线性方程组

高斯消元法解线性方程组

预备知识 矩阵^[158]

线性方程组（有 $x_1 \dots x_n$ 这 n 个未知量，所以也叫 n 元一次方程组）

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = y_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = y_m \end{cases} \quad (1)$$

可以写成矩阵和列向量相乘的形式

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (2)$$

其中 \mathbf{A} 是维度 $m \times n$ 的矩阵，称为系数矩阵。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad (3)$$

\mathbf{x} 是 n 维列向量 $(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n)^T$ 。 \mathbf{y} 是 m 维列向量 $(y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ ，称为常数列。 \mathbf{A} 和 \mathbf{y} 通常看做已知的，而 \mathbf{x} 看做未知的，即方程组待求的解。下面我们介绍一种解线性方程组的简单的方法，高斯消元法（Gauss elimination）。先来看一个简单的例子。

例 1

我们先回顾一下初中阶段如何解线性方程组，例如

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 5x - 2y = 5 \end{cases} \quad (4)$$

一种方法是将第一条等式两边除以 2 再移项得到

$$x = -\frac{3}{2}y + \frac{21}{2} \quad (5)$$

再代入第二个条式消去 x 得

$$-\frac{19}{2}y + \frac{105}{2} = 5 \quad (6)$$

解得 $y = 5$ ，再代入第一条等式得 $x = 3$ 。

另一种更方便的解法是，将第一条等式（两边）乘以 $-5/2$ ，加到第二条上消去 x 得

$$-\frac{19}{2}y = -\frac{95}{2} \quad (7)$$

解得 $y = 5$ ，再代入第一条等式得 $x = 3$ 。为什么可以这么做？简单来说是因为如果两条等式都成立，将它们两边相加得到的新的等式同样成立。下面我们来详细讲解第二种方法。

为了书写简单，我们可以用所谓的增广矩阵（**augmented matrix**）来表示矩阵和常数列，即把式 4 记为

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 21 \\ 5 & -2 & 5 \end{array} \right) \quad (8)$$

同样把第一行乘以 $-5/2$ ，加到第二行上得

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 21 \\ 0 & -19/2 & -95/2 \end{array} \right) \quad (9)$$

如果这个方程有多个未知数，且方程的数量和未知数相同（系数矩阵为方阵），理想情况下我们可以用第一行消去所有 $i > 1$ 行的第一个系数，再用第二行消去所有 $i > 2$ 行的第 2 个系数，以此类推，最后得到一个三角形系数矩阵。三角形系数矩阵的最后一行只有最后一个变量的系数不为零，我们求出这个变量后，再代入倒数第二行（只有两个未知量）求出另一个未知量，最后就可以得到所有未知量的值。这个过程叫做反向迭代（**backward substitution**）。

注意这只是一种理想的情况，如果在处理第 i 行的时候发现 $a_{i,i} = 0$ ，则该方法无法进行下去。为此我们需要稍微复杂一些的方法，也就是高斯消元法的一般步骤。

一般步骤

我们将式 1 形式的方程组用增广矩阵表示为

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & y_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & y_m \end{array} \right) \quad (10)$$

定义以下三种矩阵（或增广矩阵）变换为初等行变换. 初等行变换不改变方程组的解¹.

1. 对调矩阵中的第 i 行与第 j 行, 记作 $\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j$
2. 将矩阵第 i 行的所有元素乘以一个非零数 k , 记作 $\mathbf{r}_i \times k$
3. 把矩阵第 i 行的所有元素乘以数 k 后加到第 j 行上, 记作 $\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j \times k$

任何非零矩阵（或增广矩阵）经过有限次初等行变换后总可以使系数矩阵 \mathbf{A} 转化为梯形矩阵（**echelon form**）. 我们把梯形矩阵定义为满足该条件的矩阵: 第 i 行的第一个非零系数² $a_{i,q(i)}$ 的列标 $q(i)$ 总是大于第 $i-1$ 行的第一个非零元 $a_{i-1,q(i-1)}$ 的列标 $q(i-1)$. 与例 1 不同的是, 当系数矩阵经过行变换化为梯形矩阵后, 最后若干行有可能都为零, 最后一个非零行也未必只有一个非零元.

高斯消元法的一般步骤如下:

- 先处理第 $i=1$ 行, 如果 $a_{1,1} = 0$ 但某 $i' > 1$ 的行有 $a_{i',1} \neq 0$, 就先进行行变换³ $\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_{i'}$. 如果第一列全为 0, 我们就无视第 1 列, 从第 2 列重新开始, 以此类推. 记此时第 1 行第一个非零元的列标为 $q(1)$. 接下来做若干次行变换 $\mathbf{r}_{i'} + \mathbf{r}_1 \times k$ 使所有第 $i' > 1$ 行的 $a_{i',p(1)}$ 都为 0.

¹这点我们留到以后证明

²为了书写简单, 我们将每次变换后的系数矩阵元仍然用 $a_{i,j}$ 来表示, 虽然它的值可能已经发生变化. 若需要区分, 可以将第 n 次变换后的矩阵元用 $a_{i,j}^{(n)}$ 表示.

³如果 $a_{1,1} \neq 0$ 则不需要

- 依次处理第 $i = 2 \dots m - 1$ 行⁴. 要处理第 i 行, 先令 $q(i) = q(i - 1) + 1$, 如果此时矩阵元 $a_{i,q(i)} = 0$, 但某 $i' > i$ 的行有 $a_{i',q(i)} \neq 0$, 就先进行行变换 $\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_{i'}$. 若不存在这样的 i' , 我们就改令 $q(i) = q(i - 1) + 2$ 并重新开始该步骤, 以此类推. 接下来做若干次行变换 $\mathbf{r}_{i'} + \mathbf{r}_i \times k$ 使所有第 $i' > i$ 行的 $a_{i',p(i)}$ 都为 0.

完成后, 系数矩阵就会变为梯形矩阵.

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases} \quad (11)$$

解:

将该方程组写成增广矩阵形式

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 5 & 4 \end{array} \right) \quad (12)$$

开始消元

$$\begin{array}{l} \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_4 - 2\mathbf{r}_1 \end{array} \implies \mathbf{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{array} \right) \quad (13)$$

发现此时, 矩阵第二列自第二行以下全为零, 所以需要依次向下一列寻找不为零的元素. 继续消元

$$\begin{array}{l} \mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_4 \\ \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_4 - 0\mathbf{r}_2 \end{array} \implies \mathbf{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad (14)$$

⁴如果在处理 $i = m - 1$ 之前就得到了梯形矩阵, 则可提前终止.

$$\mathbf{r}_4 - 0.5\mathbf{r}_3 \implies \mathbf{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (15)$$

我们按照上面的方法用第 3 行求 x_4 ，代入第 2 行求得 x_3 。然而当我们想用第 1 行求 x_1 的时候却发现我们还没求出 x_2 。解决办法是，我们令 $x_2 = c$ 且假设 c 可以取任意值，则解可以表示为

$$\begin{cases} x_1 = 5 - c \\ x_2 = c \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \quad (16)$$

或者写成矢量的形式

$$\mathbf{x} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

将该式代入方程组，可以验证 c 取任意值时方程组都成立。

如果多个 x_i 的值都未知，我们就分别假设它们等于不同的任意常数即可。

解的分类

当系数矩阵变为梯形矩阵后，可以用以下步骤判断解的情况：

1. 若存在系数都为零的行 i ，但是对应的常数 y_i 却不为零，则方程组无解，否则有解。
2. 若系数矩阵可以化为三角矩阵（且系数矩阵第一列不全为零），则方程有唯一解，否则有无穷多个解。

解的表示

按照例 2 中的方法, 如果方程有解, 我们总可以将解表示为一些常矢量的线性组合加上一个常矢量.

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N c_i \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_0 \quad (18)$$

其中 c_i 是 N 个任意常数 (当方程有唯一解时 $N = 0$), 无论这些常数取什么值, \mathbf{x} 都是方程的解. 另一方面, 给出方程的任意一个解, 总能找到一些常数 c_i 与之对应. 式 18 叫做方程的**通解**, 通解中的任意一个就做方程的**特解** (例如上式中所有的 \mathbf{x}_i 都是特解).

特殊地, 如果 $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ (粗体的 $\mathbf{0}$ 表示零矢量, 即每个元都是 0), 则方程组是**齐次的**. 齐次方程一个显然的特解是 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 根据高斯消元法, 我们可知, 若齐次方程组存在无穷个解, 它们可以表示为

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N c_i \mathbf{x}_i \quad (19)$$

即 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.

所以, 对于任意有解的**非齐次**方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$, 我们可以将通解 (式 18) 从形式上理解为齐次方程组 ($\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$) 的通解与非齐次方程组的任意一个特解相加.

线性方程组与向量空间

预备知识 矩阵与向量空间^[22], 高斯消元法^[187], 矩阵的秩^[165]

线性方程组可以记为

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (1)$$

其中 \mathbf{A} 是 $M \times N$ 的矩阵, \mathbf{x} 是 N 维列向量, \mathbf{y} 是 M 维列向量, \mathbf{Ax} 表示矩阵与列向量相乘 (式 4^[158]). \mathbf{A} 和 \mathbf{y} 是已知的, \mathbf{x} 是未知的, 即方程组的解.

从向量空间^[22]的角度来看, \mathbf{x} 是 N 维向量空间 (以下称为 X 空间) 中一个矢量关于某组基底的坐标, \mathbf{y} 是 M 维向量空间 (以下称为 Y 空间) 中一个

矢量关于某组基底的坐标. 矩阵 \mathbf{A} 可以将 X 空间中的任意矢量映射到 Y 空间的对应矢量.

我们知道 \mathbf{A} 的第 i 列代表的矢量就是 X 空间中的第 i 个基底映射到 Y 空间的对应矢量. 我们把这 N 个矢量记为 $\{\alpha_i\}$. 下面我们根据 \mathbf{A} 的不同性质来分类讨论方程组的解.

我们知道矩阵的秩等于线性无关的行数, 也等于线性无关的列数, 将其记为 R .

满秩方阵 ($R = M = N$)

这是最简单的情况, 由于 $\{\alpha_i\}$ 两两线性无关, 它们可以作为 Y 空间的一组基底, 与 X 空间的基底一一对应. 那么这个映射既是单射又是满射. 对于 Y 空间的任意矢量 \mathbf{y} , X 空间都存在唯一的解 \mathbf{x} . 特殊地, 当 $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ 时 (即方程是齐次的), 唯一解就是 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$R = M < N$

当 \mathbf{A} 的秩等于 M 且小于 N 时, 映射变为从 N 维空间到更小的 M 维空间. 虽然任意的 \mathbf{x} 仍然映射到唯一的 \mathbf{y} , 但任意的 \mathbf{y} 却对应无穷多个 \mathbf{x} .

当方程是齐次的时候, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ 对应的所有 \mathbf{x} 组成 X 空间中的 $N - M$ 维的子空间, 我们把它叫做零空间. 这种情况下, 我们希望能解出零空间的一组 ($N - M$ 个) 基底, 使得这组基底的任意线性组合都是齐次方程的解.

对于非齐次方程, 我们可以先求对应的齐次方程组的零空间的一组基底, 再求出非齐次方程的任意一个解 (特解), 那么非齐次方程组的解集 (所有解的集合) 就等于零空间中的所有矢量与特解相加. 注意非齐次方程的解集并不构成一个矢量空间, 因为它不包含零矢量 ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 总是对应 $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, 所以不可能是非齐次方程组的解), 解集中若干矢量的线性组合也不一定仍然属于解集.

$R < M$

当 $R < M$ 时, $\{\alpha_i\}$ 中只有 R 个线性无关的矢量, 在 Y 空间中张成一个 R 维子空间. 如果 \mathbf{y} 落在这个子空间中 (我们可以通过 \mathbf{y} 是否与 $\{\alpha_i\}$ 线性无关来判断), 方程组就存在解, 如果落在子空间外, 方程组就无解.

第四部分

经典力学

第一章

质点运动学

物理量和单位转换

量纲和单位制

¹我们知道物理公式中有不同的物理量，例如时间，长度，电荷，等。我们把这些概念称为量纲（**physical dimension** 或 **dimension**）²。对公式中不同物理量之间量纲关系进行分析叫做量纲分析（**dimensional analysis**）。

同一个量纲又可以有不同的单位（**unit of measurement** 或 **unit**）。例如长度量纲的单位可以有“英尺”，“米”，“公里”，等。

单位转换

预备知识 几何矢量^[133]

在物理中我们首先要区分两类变量，一种是只有数值没有单位，例如“甲的身高是乙的 1.27 倍”。另一种既有数值也有单位，例如“甲的身高是 1.8 m”。我们把前者叫做一个数，把后者叫做物理量。

为了方便理解，我们这里把物理量和一维几何矢量^[133]的部分性质做一个类比：一个一维几何矢量本身也不能用一个数描述，而是需要先选取一个矢量基底，然后用一个数（即坐标）乘以这个基底才能表示这个矢量。例如若甲选择的基底是乙的基底的两倍，那么甲的坐标数值将会是乙的一半。

用公式表示，假设某个一维矢量是 \mathbf{v} ，两种不同的基底分别是 \mathbf{u}_1 和 \mathbf{u}_2 ，则

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{u}_1 = x_2 \mathbf{u}_2 \quad (1)$$

其中 x_1 和 x_2 是数学量。现在，如果我们已知 \mathbf{u}_1 和 \mathbf{u}_2 的关系，例如

$$\mathbf{u}_1 = c \mathbf{u}_2 \quad (2)$$

其中 c 也是一个数学量。我们就可以直接将这个关系代入式 1 中的 \mathbf{u}_1 ，得

$$x_1 (c \mathbf{u}_2) = x_2 \mathbf{u}_2 \quad (3)$$

¹参考 Wikipedia 相关页面。

²注意 dimension 也可以表示空间的维度，二者是完全不同的概念。

现在等式两边都使用同样的基底，于是他们的坐标也必定相同，即

$$x_2 = cx_1 \quad (4)$$

同样，若基底间的关系是

$$\mathbf{u}_2 = b\mathbf{u}_1 \quad (5)$$

显然有 $b = 1/c$ ，代入式 1 中的 \mathbf{u}_2 得

$$x_1 = bx_2 \quad (6)$$

例 1 长度

我们来考虑一个表示长度的物理量 L 。在我们确定单位（类比矢量基底）以前，它不能使用任何数表示。现在规定单位（即基底）为 $l_1 = 1 \text{ cm}$, $l_2 = 1 \text{ m}$ ，且有

$$l_2 = 100l_1 \quad (7)$$

若令 $L = 2 \text{ m}$ ，则

$$L = 2l_2 = 2(100l_1) = 200l_1 = 200 \text{ cm} \quad (8)$$

或者记为

$$L = 2 \text{ m} = 2(100 \text{ cm}) = 200 \text{ cm} \quad (9)$$

若令 $L = 5 \text{ cm}$ ，则

$$L = 5l_1 = 5\left(\frac{1}{100}l_2\right) = 0.05 \text{ m} \quad (10)$$

或者记为

$$L = 5 \text{ cm} = 5\left(\frac{1}{100} \text{ m}\right) = 0.05 \text{ m} \quad (11)$$

与一维矢量不同的是，两个相同的物理量可以相除并得到一个无量纲的数，且这个数不依赖于单位制的选取。这么做的时候，可以类比为将两个矢量的模长相除。例如

$$\frac{200 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = \frac{2 \text{ m}}{1000 \text{ mm}} = \frac{2 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 2 \quad (12)$$

所以，另一种单位转换的办法，是先凑出一个等于 1 的无量纲分数，例如 $1 \text{ m}/(1000 \text{ mm}) = 1$ ，使得分母是原单位，分子是新单位，然后将它乘以需要转换的物理量。例如

$$2000 \text{ mm} = 2000 \text{ mm} \times \frac{1 \text{ m}}{1000 \text{ mm}} = 2 \text{ m} \quad (13)$$

这与例 1 中的方法是完全等效的。

不同物理量的运算

首先要注意,把两个具有不同量纲的物理量相加减没有任何意义,把一个无量纲的数与一个物理量相加减也没有意义.例如把长度和时间相加,把速度与数字 2 相加都是没有意义的.

然而,几个相同或不同量纲的物理量相乘或相除却是很常见的.例如长度乘以长度等于体积,长度除以时间等于速度.相乘或相除后所得物理量的单位也可以写成若干个基本单位相乘或者相除,最终表示成若干个单位的幂相乘的形式(可以用“·”表示相乘,也可以省略).例如

$$2 \text{ m} \times 3 \text{ m} = 6 \text{ m} \cdot \text{m} = 6 \text{ m}^2 \quad (14)$$

$$6 \text{ m}/3 \text{ s} = 2 \text{ m/s} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (15)$$

有时候我们会给这些复合单位一个新的记号,例如根据牛顿第二定律(式 2^[220]),力的国际单位应该是 $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$,但我们也可以定义一个等效单位 N (牛).

位置矢量 位移

预备知识 几何矢量^[133]

位置矢量(位矢)就是从坐标原点指向某一点的矢量,通常记为 \mathbf{r} . 当定义了一个坐标系,那么坐标系中一点的位置就可以用位矢表示.

有时候表示一个关于位置的函数,通常将位矢 \mathbf{r} 作为自变量.例如一个物体内密度关于位置的分布可以表示为 $\rho(\mathbf{r})$. 在直角坐标系中,就相当于 $\rho(x, y, z)$,在球坐标系中就相当于 $\rho(r, \theta, \phi)$ 这么做的好处是书写简洁,而且不需要指定坐标系的种类.

在物体运动过程中,可以把物体的位矢看做时间的矢量函数 $\mathbf{r}(t)$,则**位移** $\Delta \mathbf{r}$ 是一段时间 $[t_1, t_2]$ 内物体初末位矢的矢量差

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1) \quad (1)$$

注意位移只与一段时间内物体的初末位置有关,与路径无关.

预备知识 全微分^[72], 矢量的微分, 矢量内积^[146]

例 1 证明 $dr = \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}$

这个证明的几何意义是, 位矢模长的微小变化等于位矢的微小变化在位矢方向的投影.

这里以平面直角坐标系中的位矢为例证明. 令位矢 \mathbf{r} 的坐标为 (x, y) , 模长为 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 模长的全微分为

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \quad (2)$$

考虑到 $x/\sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $y/\sqrt{x^2 + y^2}$ 分别为 $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ 的两个分量, dx 和 dy 分别为 $d\mathbf{r}$ 的两个分量, 根据内积的定义^[146] 上式变为

$$dr = \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \quad (3)$$

速度 加速度 (一维)

预备知识 位移^[198], 复合函数求导^[93]

速度和加速度都是矢量, 但如果我们考虑质点的一维运动 (沿直线运动), 那么我们可以指定一个正方向并沿运动方向建立坐标轴. 这样一来, 我们就可以把一维情况下的位移、速度、加速度这些矢量用一个标量来表示, 可以用标量的正负号区分矢量的方向, 正号代表指向正方向, 负号代表指向负方向, 标量的绝对值就等于矢量的模长. 所以以下我们用坐标 x 来表示一维位移, 实数 v 和 a 来表示一维速度和加速度. 事实上, 这些标量可以看作是对应矢量的坐标^[133].

物理学中, **速度 (velocity)** 和 **加速度 (acceleration)** 通常指瞬时值. 在一维运动中, **瞬时速度 (instantaneous velocity)** 被定义为一段极短时间 Δt 内质点的位移^[198] Δx 除以这段时间, **瞬时加速度 (instantaneous acceleration)** 被定义为一段极短时间 Δt 内质点的速度变化 Δv 除以这段时间, 而这些恰好是导数^[78] 的定义. 用极限^[69] 和导数^[78] 来表示, 就是

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} \quad (1)$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} \quad (2)$$

根据高阶导数^[87]的定义, 加速度就是位矢的二阶导数, 即导数的导数

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (3)$$

为什么经典力学中, 我们通常之关心位移的一阶和二阶导数而不关心更高阶呢? 因为牛顿第二定律中出现了加速度, 把它和质点的受力紧紧关联起来, 另一方面, 和速度成正比的动量是重要的守恒量.

例 1 匀加速运动

若已知某直线运动的位移—时间函数为

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \quad (4)$$

试证明这是一个匀加速运动.

对位移求导得到速度为

$$v(t) = v_0 + a_0 t \quad (5)$$

再次求导 (二阶导数) 得到加速度为 $a(t) = a_0$ 是常数. 可见这是一个匀加速运动.

事实上, 任何匀加速直线运动都可以表示为式 4 的形式, 详见“匀加速直线运动^[208]”.

例 2 简谐振动

已知简谐振动 (详见“简谐振子^[233]”) 的位移函数为 $x(t) = A \cos(\omega t)$, 运用复合函数求导^[93] 得速度为 $v(t) = -A\omega \sin(\omega t)$, 加速度为 $a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t)$.

由速度或加速度求位移

预备知识 牛顿—莱布尼兹公式^[115]

既然一维速度 $v(t)$ 是位置 $x(t)$ 的导数, 那么 $x(t)$ 是 $v(t)$ 的原函数^[101]. 由牛顿—莱布尼兹公式得速度在一段时间的定积分等于初末位置之差, 即

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (6)$$

所以若已知某时刻质点的位置 $x(t_0) = x_0$, 和速度函数 $v(t)$, 就可以求得任意时刻的位置.

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t') dt' \quad (7)$$

注意为了区分积分变量和积分上限, 我们把积分变量改成 t' . 这是一个常见的做法.

例 3 匀速直线运动

若一维运动的质点速度始终为 v_0 , 由式 7 得

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t v_0 dt \\ &= x_0 + v_0(t - t_0) \end{aligned} \quad (8)$$

与式 6 和式 7 同理, 一维速度和加速度之间也有类似关系

$$v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt \quad (9)$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t') dt' \quad (10)$$

把式 10 带入式 7 再次定积分得 (注意积分变量再次重命名)

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t \left[v_0 + \int_{t_0}^{t'} a(t'') dt'' \right] dt' \\ &= x_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^{t'} a(t'') dt'' \right] dt' \end{aligned} \quad (11)$$

这里做了两次积分, 即二重积分^[??].

简单的例子见“匀加速直线运动^[208]”.

习题 1

你是否能看出, 以 t' 和 t'' 建立直角坐标系, 式 4 的二重积分的区域是一个三角形?

速度 加速度

预备知识 速度 加速度（一维）^[199]，矢量的导数^[20]，矢量积分

在大学物理中，“位移”，“速度”和“加速度”都是矢量，既包括了大小，也包括方向。如果没有特殊说明，它们一般是指“瞬时速度”和“瞬时加速度”。

速度的定义

考察一个质点在运动过程中在某时刻经过某一点的速度，就取质点在这一点附近的一小段位移 $\Delta \mathbf{r}$ ，以及物体完成这段位移需要的时间 Δt 。那么当 Δt 无穷小时，若 $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ 存在极限，则这个极限就是速度矢量 \mathbf{v} 。写成极限的形式，就是

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (1)$$

速度与位矢的关系

质点在运动时，其位矢 \mathbf{r} 是时间 t 的函数，质点在 t_1 时刻的位矢为 $\mathbf{r}(t_1)$ ，经过时间 Δt ，位矢为 $\mathbf{r}(t_1 + \Delta t)$ ，所以物体在 Δt 时间内的位移为

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_1 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_1) \quad (2)$$

式 2 代入式 1，得

$$\mathbf{v}(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t_1 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_1)}{\Delta t} \quad (3)$$

根据矢量求导^[20]的定义，这就是位矢对时间的导数，即

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (4)$$

简单的例子：匀速圆周运动的速度（求导法）^[203]。

加速度的定义

通常情况下, 质点运动轨迹上的每一点都会对应一个确定的速度矢量³, 类比速度的定义, 加速度的定义为

$$\mathbf{a}(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t_1 + \Delta t) - \mathbf{v}(t_1)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (5)$$

结合速度的定义, 加速度为

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (6)$$

所以, 加速度是速度对时间的导数, 或者位矢对时间的二阶导数.

简单的例子: 匀速圆周运动的速加速度 (求导法^[78]).

由速度或加速度计算位矢

如果已知速度关于时间的函数 $\mathbf{v}(t)$, 以及初始时间 t_0 和位置 \mathbf{r}_0 , 该如何得到位移—时间函数 $\mathbf{r}(t)$ 呢? 类比一维的情况^[199], 我们也可以通过矢量函数的定积分^[201] (见??) 来求出速度—时间函数进而求出位移—时间函数

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t) dt \quad (7)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t) dt \quad (8)$$

简单的例子: 匀加速运动^[209].

圆周运动的速度

几何法

³注意上面的速度在定义时虽然取了两点, 但是取极限以后, 速度和位置是一一对应的, 也就和时间一一对应, 而不是两个位置和时间对应一个速度.

预备知识 小角正弦值极限^[72]，速度的定义^[202]

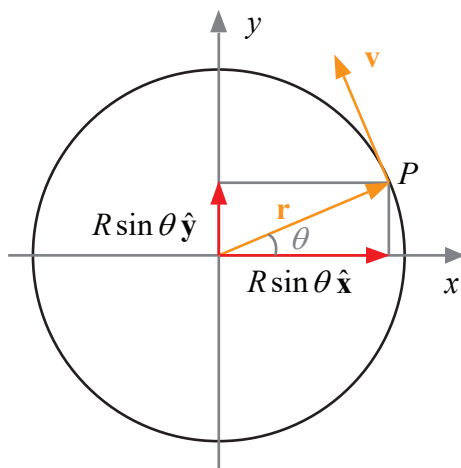


图 1: 匀速圆周运动的速度

如图设一个点 P 做半径为 R 的圆周运动，角速度为 ω （可以是时间的函数），那么在一段微小时间 Δt 内，可以认为 ω 是常量，点 P 转过的角度为 $\Delta\theta = \omega\Delta t$ 。这样，根据小角正弦值极限^[72]，当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，点 P 在 Δt 内走过的位移长度（线段的长度）趋近于弧的长度，即 $|\Delta\mathbf{s}| \rightarrow R\omega\Delta t$ 。

根据速度的定义

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{s}}{\Delta t} \quad (1)$$

速度的大小为

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\mathbf{s}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega R \Delta t}{\Delta t} = \omega R \quad (2)$$

速度的方向显然与过 A 点的圆的切线重合。

求导法

预备知识 矢量的导数 求导法则^[??]

如图，在平面直角坐标系（单位矢量分别为 $\hat{\mathbf{x}}$ ， $\hat{\mathbf{y}}$ ）中，令一个绕原点做逆时针匀速圆周运动的质点的位矢为 \mathbf{r} ，与 $\hat{\mathbf{x}}$ 的夹角是时间的函数 $\theta(t)$ ，圆周运动的半径为 R 。那么任意时刻 t 将位矢 \mathbf{r} 沿着 x 与 y 轴方向分解，有

$$\mathbf{r}(t) = R \cos \theta(t) \hat{\mathbf{x}} + R \sin \theta(t) \hat{\mathbf{y}} \quad (3)$$

其中 \hat{x} 是 x 轴正方向的单位矢量, \hat{y} 是 y 轴正方向的单位矢量. 由速度的定义 $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, 即

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d}{dt}(R \cos \theta \hat{x} + R \sin \theta \hat{y}) = -R\dot{\theta} \sin \theta \hat{x} + R\dot{\theta} \cos \theta \hat{y} \\ &= \dot{\theta}R[\cos(\theta + \pi/2)\hat{x} + \sin(\theta + \pi/2)\hat{y}]\end{aligned}\quad (4)$$

定义**瞬时角速度** (简称**角速度**) 等于 θ 关于时间的导数 $\omega = \dot{\theta}$, 则速度大小为 $v = \omega R$, 方向为 \hat{r} 逆时针旋转 $\pi/2$, 即圆的切线方向.

三维空间的情况

预备知识 矢量叉乘^[149]

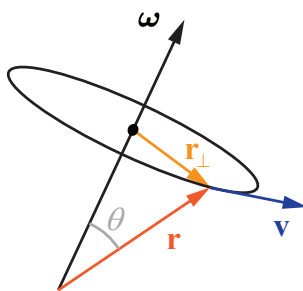


图 2: 角速度与线速度

如图 2, 在三维空间中, 圆周运动所在的平面可以任意选取, 我们可以将角速度拓展成一个矢量 ω , 其方向垂直于该平面并由右手定则^[131] 确定. 令坐标系的原点在圆周运动的轴上, 用位矢 \mathbf{r} 表示点 P 的位置, 则圆周运动的半径为 $r_{\perp} = r \sin \theta$, 其中 θ 是 \mathbf{r} 与 ω 的夹角. 所以圆周运动速度的大小为 $v = \omega r \sin \theta$. 根据矢量叉乘的几何定义^[149], 有

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \quad (5)$$

圆周运动的加速度

预备知识 圆周运动的速度^[203]

匀速圆周运动的加速度（几何法）

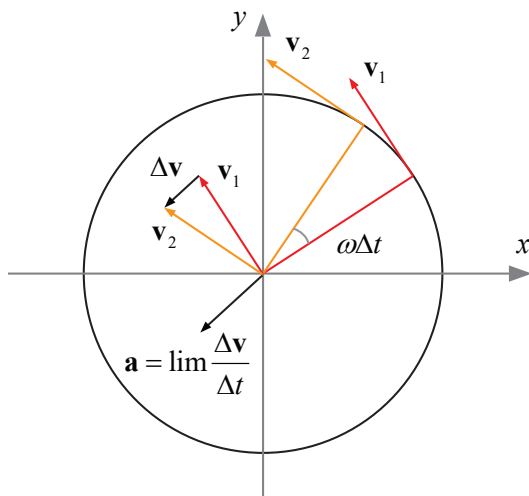


图 1: 把速度矢量移到原点再相减

在圆周运动中，位矢 \mathbf{r} 是时间的函数。对时间求导后，我们得到速度矢量关于时间的函数。对速度也进行同样的操作，就不难得到圆周运动的加速度^[202]。

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (1)$$

现在我们用几何的方法来求该极限。根据矢量减法的定义，计算 $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ 要先把 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 的起点放在一起（例如都放在原点），再从 \mathbf{v}_1 的终点指向 \mathbf{v}_2 的终点得到 $\Delta \mathbf{v}$ （图 1）。

我们已知匀速圆周运动的速度大小为 $|\mathbf{v}| = R\omega$ ，根据“微小正弦极限^[72]”中的结论，把 $\Delta \mathbf{v}$ 的长度用弧长近似，得

$$|\Delta \mathbf{v}| = |\mathbf{v}| \Delta \theta = (R\omega) \omega \Delta t \quad (2)$$

所以质点的加速度大小为

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega^2 R \Delta t}{\Delta t} = \omega^2 R \quad (3)$$

由图可得加速度的方向是速度方向逆时针偏转 $\pi/2$. 又由于速度方向是位移方向逆时针偏转 $\pi/2$, 所以匀速圆周运动的加速度的方向与位矢的方向相反.

结合模长和方向, 令 \mathbf{r} 为位矢 (取圆心为坐标原点), 就得到加速度的矢量形式

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r} \quad (4)$$

由速度与角速度的关系, 它的模长也可以表示为 v^2/r 或者 ωv .

圆周运动的加速度 (求导法)

现在我们来推导一般圆周运动的加速度 (不要求匀速), 将圆周运动的速度 (式 4^[203]) 再次对时间求导得加速度

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = -R\dot{\theta}^2(\cos\theta\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\hat{\mathbf{y}}) + \ddot{\theta}R[\cos(\theta + \pi/2)\hat{\mathbf{x}} + \sin(\theta + \pi/2)\hat{\mathbf{y}}] \quad (5)$$

当角速度 $\omega = \dot{\theta}$ 为常量时 (匀速圆周运动), 上式第二项为零, 第一项与式 4 相同, 当角速度随时间变化时, 由于 $\ddot{\theta}R = \dot{\omega}R = \dot{v}$, 上式可以记为

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r} + \dot{v} \hat{\mathbf{v}} \quad (6)$$

其中 $\hat{\mathbf{v}}$ 是速度方向的单位矢量. 所以变速圆周运动除了向心加速度外, 还有一个沿速度方向的加速度.

三维空间的情况

预备知识 连续叉乘的化简^[154]

若要把式 4 拓展到三维空间中围绕过圆心的轴转动的任意匀速圆周运动, 可以对式 5^[203] ($\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$) 求时间导数 (令 $\boldsymbol{\omega}$ 为常矢量) 得

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (7)$$

将式 5^[203] 再次代入, 得

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (8)$$

要验证该式与式 4 吻合, 把连续叉乘化为内积得

$$\mathbf{a} = \omega^2 r \cos\theta \hat{\boldsymbol{\omega}} - \omega^2 \mathbf{r} = -\omega^2 (\mathbf{r} - r \cos\theta \hat{\boldsymbol{\omega}}) = -\omega^2 \mathbf{r}_\perp \quad (9)$$

其中 θ 是 $\hat{\omega}$ 和 \hat{r} 之间的夹角, \mathbf{r}_\perp 是从圆周运动的圆心指向点 P 的矢量, 相当于式 4 中的 \mathbf{r} . 证毕.

我们再来考虑变速圆周运动的情况, 当 ω 的模长随时间变化时, 式 7 的求导变为

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} = -\omega^2 \mathbf{r}_\perp + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \quad (10)$$

定义角加速度 (angular acceleration) $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$, 并将式 5^[203] 代入, 得

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \quad (11)$$

由定义易证右边第二项等于式 6 中的 $\dot{v}\hat{v}$.

匀加速直线运动

预备知识 速度加速度 (一维)^[199]

质点做匀加速直线运动时, 我们沿运动的直线建立坐标轴 x , 则最一般的运动方程

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2 \quad (1)$$

其中 x_0, v_0, a_0 分别是 t_0 时刻的位置, 速度和加速度. 注意沿 x 轴正方向的速度和加速度取正号, 沿反方向取负号.

匀加速直线运动速度变化为

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0) \quad (2)$$

另外有一条不含时间的公式

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a_0(x_2 - x_1) \quad (3)$$

其中 v_1, v_2 分别是质点经过点 x_1 和 x_2 时的速度.

注意只有初速度矢量和加速度矢量方向相同 (包括初速度为零) 时匀加速运动的轨迹才是直线, 否则轨迹就是抛物线, 见“匀加速运动^[209]”.

未完成：把“匀加速运动”的自由落体移动过来

未完成：插入 ep1 的飞机丢导弹例题

推导

做匀速直线运动的质点在 t_0 时的位置为 x_0 ，速度为 v_0 ，且加速度始终等于常数 a_0 ，求任意时刻的速度和加速度 $x(t)$ 。

我们首先把 $a(t) = a_0$ 代入式 10 [199]

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a_0 dt' \quad (4)$$

马上得到式 2。再次积分（式 7 [199]）

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a_0(t' - t_0)] dt' \quad (5)$$

得式 1。这个过程相当于直接使用式 11 [199]。

要得到式 3，由式 1 和式 2 分别得

$$x_2 - x_1 = v_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_0(t_2 - t_1)^2 \quad (6)$$

$$t_2 - t_1 = \frac{v_2 - v_1}{a_0} \quad (7)$$

代入消去 t 得式 3。直观来看，如果画速度—时间图， $x_2 - x_1$ 可以表示成梯形的面积，利用梯形公式可以得到该式。

式 3 的另一种推导是，在学习牛顿第二定律和动能定理以后，我们可以直接写出

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F(x_2 - x_1) = ma(x_2 - x_1) \quad (8)$$

两边除以 $m/2$ 即可。

匀加速运动

预备知识 速度 加速度^[202]

若在一段时间内，质点的加速度矢量不随时间变化（常矢量） \mathbf{a} ，那么我们就说质点做匀加速运动（**constant acceleration motion**）。由“速度 加速度^[202]”中的式 7 和式 8，速度和位移函数分别为

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{a} dt = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} \cdot (t - t_0) \quad (1)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t) dt = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot (t - t_0)^2 \quad (2)$$

匀加速直线运动

一个最简单的直线匀加速运动是自由落体运动。自由落体运动是初速度 $\mathbf{v}_0 = 0$ ，竖直向下加速度为重力加速度恒为 g 的匀加速直线运动。其中 $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ 是重力加速度，也可以用常矢量 \mathbf{g} 表示。代入式 1 和式 2 得

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{g} \cdot (t - t_0) \quad (3)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot (t - t_0)^2 \quad (4)$$

为了方便，在一维运动时我们可以直接用标量表示位移，速度和加速度，这样以上两式中的矢量都可以用标量表示。

未完成：自由落体移动到“匀加速直线运动”

抛体运动

作为一个稍复杂的情况，抛体运动是加速度为 \mathbf{g} ，初速度为 \mathbf{v}_0 的匀加速运动。将 $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ 代入式 1 和式 2 得

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g} \cdot (t - t_0) \quad (5)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot (t - t_0)^2 \quad (6)$$

对比式 4 和式 6 可以发现抛体运动就是自由落体运动与匀速直线运动的矢量叠加。所以如果我们在一个相对于当前参考系以 \mathbf{v}_0 运动的参考系中观察抛体运动，就会是自由落体运动。

匀速曲线运动

预备知识 曲率半径^[97]，圆周运动的加速度^[205]

要研究质点的任意曲线运动，如果我们已经知道曲线的形状和运动的速度，最重要的是算出它的加速度，以使用牛顿第二定律进行受力分析。质点沿曲线运动时，即使它的速度不变，也存在加速度，与速度的方向垂直。最典型的例子就是匀速圆周运动。我们现在把对圆周运动加速度的分析拓展到沿任意曲线的匀速运动，以后还会拓展到变速曲线运动^[2?]。

在以下的推导中我们会发现可以直接使用匀速圆周运动的向心加速度^[205]公式来计算任意匀速曲线运动，只要把半径替换成曲线某点处的曲率半径。

加速度推导

质点做匀速曲线运动时，由于速度矢量模长 $|\mathbf{v}|$ 恒定，加速度^[202] 矢量 \mathbf{a} 完全由速度矢量 \mathbf{v} 的方向改变而产生，就像匀速圆周运动那样。回顾加速度的定义（式 5 ^[202]）

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (1)$$

类似用几何法推导匀速圆周运动的速度^[203] 那样，我们可以近似认为^[72] 当速度矢量 \mathbf{v} 转过一个小角度 $\Delta\theta$ 时，它的增量 $\Delta\mathbf{v}$ 垂直于 \mathbf{v} ，且大小为

$$|\Delta \mathbf{v}| = v \Delta\theta \quad (2)$$

代入式 2 得加速度大小为

$$|\mathbf{a}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = v \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = v\omega \quad (3)$$

其中 ω 是速度矢量 \mathbf{v} 在某个时刻旋转的角速度。方向与 \mathbf{v} 垂直，即曲线切线变化的方向。

如果使用角速度矢量（图 2 ^[203]） $\boldsymbol{\omega}$ ，那么加速度矢量可以用矢量叉乘^[149] 表示为

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (4)$$

那么当质点经过曲线某一点时, 如何求 ω 呢? 我们可以使用曲率^[97] 的概念. 令质点所在位置的曲率半径为 R , 根据曲率半径的定义 (式 1^[97]), Δt 内质点在曲线上走过的长度为 $\Delta l = v\Delta t$, 所以切线的角度变化率为

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta l} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{v}{R} \quad (5)$$

再带入式 3 得

$$|\mathbf{a}| = v\omega = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \quad (6)$$

这和匀速圆周运动的向心加速度 (式 4^[205]) 的形式一样, 只是把半径换为曲率半径. 这是意料之中的, 因为圆就是曲率半径恒为 R 的特殊曲线.

极坐标中的速度和加速度

预备知识 速度 加速度^[202], 极坐标中单位矢量的偏导^[?]

若已知某点的极坐标关于时间的函数 $r(t)$ 和 $\theta(t)$, 求该点的速度和加速度.

极坐标中的位置矢量可以用 $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ 表示, 注意其中径向单位矢量可以看做复合函数 $\hat{\mathbf{r}}[\theta(t)]$. 根据定义, 速度是位矢的一阶导数, 在力学中经常在变量上面加一点表示对时间的一阶导数, 两点表示二阶导数, 根据矢量的求导法则

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \quad (1)$$

由链式法则和??^[?], 上式中

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta}\dot{\theta} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (2)$$

所以极坐标中的速度为

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (3)$$

这是符合直觉的, 径向速度等于位矢模长的导数, 而角向速度等于位矢模长乘以角速度.

我们再来计算加速度, 用同样的方法对速度求一阶导数得

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} \\ &= \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} - r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{r}} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (4)$$

这个结论并不是那么显而易见. 我们将加速度的径向和角向分量分别记为 a_r 和 a_θ , 其中 a_θ 还可以记为另一种更紧凑形式即

$$a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \quad (5)$$

速度的坐标系变换

预备知识 几何矢量^[133]

无相对转动

若两个坐标系 S 和 S' 之间无相对转动 (注意我们不要求坐标轴 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 和 $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ 同方向), 那么某时刻两坐标系之间的相对速度是唯一确定的, 即 S' 系中任意一个固定点相对于 S 系任意一个固定点的速度. 我们把 S' 系相对于 S 系的速度记为 \mathbf{v}_r . 根据高中所学的速度叠加原理, 若某点 P 相对于 S 系的速度瞬时为 \mathbf{v}_S , 相对于 S' 的瞬时速度为 $\mathbf{v}_{S'}$ 我们有

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_{S'} + \mathbf{v}_r \quad (1)$$

其中三个矢量都可以是时间的函数. 注意该式与点 P 的位置无关只和速度有关.

注意式 1 中的矢量都是不依赖于坐标系的几何矢量, 不能将 \mathbf{v}_S 和 \mathbf{v}'_S 等同于点 P 在 S 系和 S' 系中的三个位置坐标的求导. 如果要将式 1 写成分量的形式, 三个矢量必须使用同一坐标系. 我们来举例说明.

例 1

令 $\hat{y}' = \hat{x}$, $\hat{z}' = \hat{y}$, $\hat{x}' = \hat{z}$, $\mathbf{v}_r = 2\hat{x} = 2\hat{y}'$, 点 P 在 S 系中坐标关于时间的导数为 $(1, 2, 3)$. 请将式 1 表示为三个分量的形式.

容易得出, 点 P 在 S' 系中的坐标关于时间的导数为 $(3, -1, 2)$.

我们先来看错误的理解: 将 \mathbf{v}_S 等同于 $(1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_{S'}$ 等同于 $(3, -1, 2)$, 这时会发现, 无论 \mathbf{v}_r 取 $(2, 0, 0)$ 还是 $(0, 2, 0)$ 都不能让等式对三个分量同时成立.

正确的做法是将三个矢量都放到同一坐标系中. 先使用 S 系, \mathbf{v}_S 的分量仍然取 $(1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_{S'}$ 在 S 系中为 $(-1, 2, 3)$, \mathbf{v}_r 在 S 系中取 $(2, 0, 0)$. 这样式 1 就成立了.

也可以三个矢量都放到 S' 系中, 有 $(3, 1, 2) = (3, -1, 2) + (0, 2, 0)$, 同样成立.

对于一般的情况, 两参考系中矢量的坐标变换需要使用空间旋转矩阵^[169].

一般情况

对于任意两个坐标系, 他们之间的相对运动除了平移可能还有转动, 即 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 和 $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ 之间的关系可能随时间变化. 这时式 1 是否仍然成立呢?

要回答这个问题我们首先要修改 \mathbf{v}_r 的定义. 按照上一节的定义, 如果坐标系间存在相对转动, \mathbf{v}_r 将与两个固定点的选取有关. 若定义某时刻点 P 在两坐标系中的坐标分别为 (x_p, y_p, z_p) 和 (x'_p, y'_p, z'_p) , 则 \mathbf{v}_r 可以定义为 S' 系中的固定点 (x'_p, y'_p, z'_p) 相对于 S 系中的固定点 (x_p, y_p, z_p) 的瞬时速度. 这时仍有

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_{S'} + \mathbf{v}_r \quad (2)$$

再次强调, 这三个矢量也是不依赖坐标系的几何矢量. 若要记为分量的形式需要使用同一坐标系.

例 2

令 S' 系 $t = 0$ 时与 S 系重合并绕 z 轴逆时针以角速度 ω 转动 (不一定为匀速), 又令点 P 的运动方程为 $\mathbf{r}(t) = at\hat{x}'$, 验证式 2.

首先将 $\mathbf{r}(t)$ 用 \hat{x}, \hat{y} 基底表示为

$$\mathbf{r}(t) = at(\cos\omega t \hat{x} + \sin\omega t \hat{y}) \quad (3)$$

将 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 视为常矢量, $\mathbf{r}(t)$ 关于时间求导得点 P 相对于 S 系的速度

$$\mathbf{v}_S = a(\cos\omega t \hat{x} + \sin\omega t \hat{y}) + a\omega t(-\sin\omega t \hat{x} + \cos\omega t \hat{y}) \quad (4)$$

将 $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ 视为常矢量, $\mathbf{r}(t)$ 关于时间求导得点 P 相对于 S' 系的速度

$$\mathbf{v}_{S'} = \frac{d}{dt}(at\hat{x}') = a\hat{a} = a(\cos\omega t \hat{x} + \sin\omega t \hat{y}) \quad (5)$$

最后, t 时刻两坐标系在点 P 处的相对速度 (见式 5^[203]) 为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_r &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (\omega\hat{z}') \times (at\hat{x}') \\ &= a\omega t\hat{z}' \times \hat{x}' = a\omega t\hat{y}' = a\omega t(-\sin\omega t \hat{x} + \cos\omega t \hat{y}) \end{aligned} \quad (6)$$

将以上三式代入式 2 可验证其成立. 注意以上我们将所有的矢量用 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 基底表示三个矢量, 同理我们也可以将所有矢量用 $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$.

证明

(未完成)

加速度的坐标系变换

预备知识 速度的参考系变换^[213]

无相对转动

类比式 1^[213], 若两个参考系之间只有平移没有转动, 令某时刻点 P 相对于 S 系和 S' 系的加速度分别为 \mathbf{a}_S 和 $\mathbf{a}_{S'}$, 再令两坐标系中任意两个固定点 (例如各自的原点) 之间的加速度为 \mathbf{a}_r , 那么有

$$\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_{S'} + \mathbf{a}_r \quad (1)$$

同样地, 如果要将该式写成分量的形式, 三个矢量必须使用同一坐标系 (见例 1^[213]).

一般情况

类比式 2^[213], 若两参考系之间有可能存在转动, 牵连加速度 \mathbf{a}_r 的定义会变得比牵连速度 \mathbf{v}_r 更微妙, 因为牵连速度与坐标系选取无关, 而牵连加速度却有关! 我们举例解释.

例 1 牵连加速度

令 S' 系原点沿着 S 系的单位矢量 \mathbf{x} 匀速运动, 且相对 S 系以恒定角速度矢量 $\boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{y}$ 转动. 令 $t = 0$ 时两系完全重合, 且点 P 恰好经过原点. 我们来讨论此刻原点处的牵连速度.

显然, 两参考系 $t = 0$ 时刻的固定点就是各自的原点 O_S 和 $O_{S'}$. $O_{S'}$ 沿 S 系的 x 轴匀速运动, 所以 S 系的观察者会认为牵连加速度为零. 然而在 S' 系的观察者看来, O_S 始终在做速度不为零的曲线运动, 所以 $t = 0$ 时牵连加速度不为零.

我们在 S 系中讨论问题. 定义 t 时刻点 P 在 S' 系中的固定点相对于 S 系的加速度为 \mathbf{a}_r . 那么可以证明 (比式 1 多出了一项)

$$\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_{S'} + \mathbf{a}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{S'} \quad (2)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 是 S' 系相对于 S 系的瞬时角速度. 最后一项被称为科里奥利加速度 (Coriolis Acceleration)

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{S'} \quad (3)$$

若我们把 S' 相对于 S 的运动分解为原点的平移加绕原点的转动, 那么牵连加速度 \mathbf{a}_r 也可以分解为平移加速度和旋转加速度的矢量和, 而旋转加速度又可以分为向心加速度和角加速度引起的切向加速度.

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_T + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \quad (4)$$

其中平移加速度 \mathbf{a}_T 的定义为 S' 系原点相对于 S 系原点 (关于 S 系) 的加速度.

习题 1

请使用例 2^[213] 的情景验证式 2.

习题 2

试证明式 4.

证明 (旋转矩阵)

预备知识 旋转矩阵的导数^[174]

我们在 S 系中以坐标的形式证明式 2, 即式中的矢量都看作是 S 系中的三个坐标. 令点 P 在两系中的坐标分别为 $\mathbf{r}_S(t) = (x, y, z)^T$ 和 $\mathbf{r}_{S'}(t) = (x', y', z')^T$, 且坐标变换可以用一个旋转矩阵 $\mathbf{R}(t)$ 和一个平移矢量 $\mathbf{d}(t)$ 表示为

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{R}\mathbf{r}_{S'} + \mathbf{d} \quad (5)$$

两边关于时间求导得⁴

$$\dot{\mathbf{r}}_S = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{r}_{S'} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{r}}_{S'} + \dot{\mathbf{d}} \quad (6)$$

⁴用一点表示时间导数, 两点表示时间二阶导数

再求导并整理得

$$\ddot{\mathbf{r}}_S = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{r}}_{S'} + (\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{r}_{S'} + \ddot{\mathbf{d}}) + 2\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{r}}_{S'} \quad (7)$$

下面我们只需证明这三项分别对应式 2 的各项即可.

在 S 系中, 显然有 $\mathbf{a}_S = \ddot{\mathbf{r}}_S$. P 在 S' 系中的加速度为 $\ddot{\mathbf{r}}_{S'}$, 乘以旋转矩阵就变换到 S 系中, 所以 $\mathbf{a}_{S'} = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{r}}_{S'}$.

若 S' 系中的固定点 $\mathbf{r}_{S'}$ 不随时间变化, 则求二阶导数得 S' 系中固定点相对于 S 系中固定点的加速度 (在 S 系中的坐标)

$$\mathbf{a}_r = \ddot{\mathbf{R}}\mathbf{r}_{S'} + \ddot{\mathbf{d}} \quad (8)$$

再来看式 7 最后一项, 将式 1^[174] 代入, 得

$$2\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{r}}_{S'} = 2\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{R}\dot{\mathbf{r}}_{S'}) = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{S'} \quad (9)$$

这就是式 2 的最后一项. 证毕.

第二章

质点动力学

力的分解与合成

预备知识 几何矢量^[133]

在经典力学中，力可以用几何矢量^[133]表示。力的分解与合成可以看作一个基本假设。这个假设是牛顿运动定律^[220]的基础，因为牛顿三定律中的“力”都是指质点所受的合力。

当若干个力 \mathbf{F}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) 作用在同一个质点上时，等效于一个力 \mathbf{F} 作用在同一个质点上。

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N \quad (1)$$

注意这里的加号表示几何矢量^[133]的加法而不是数的加法。我们把 \mathbf{F} 叫做 N 个 \mathbf{F}_i 的合力，每个 \mathbf{F}_i 叫做一个分力。式 1 从左到右的过程叫做力的分解，从右到左的过程叫做力的合成。

这里所说的“等效”可以指这个质点受力后的运动情况，也可以指物体发生的形变，例如该质点固定在弹簧上，弹簧发生的形变。

回顾两个几何矢量的加法，我们就得到了所谓的平行四边形法则或者三角形法则。若 $N > 2$ ，用“首尾相接”的方法即可。注意这个过程不需要坐标系的概念。若建立了直角坐标系，我们也可以先计算这些矢量的坐标，然后使用坐标计算矢量加法（式 7^[133]）。

多次分解

注意在式 1 中我们甚至可以进行多次分解，即继续令某个（或每个）力等于若干力相加

$$\mathbf{F}_i = \sum_j \mathbf{F}_{i,j} \quad (2)$$

那么 \mathbf{F} 就可以最终分解为

$$\mathbf{F} = \sum_{i,j} \mathbf{F}_{i,j} \quad (3)$$

这仍然符合分解的定义，即一个力矢量表示为多个力矢量相加，本质上并无不同。

牛顿运动定律 惯性系

预备知识 加速度^[202]，力的合成与分解^[219]

牛顿的三定律可表述如下，为了避免讨论物体的质心及转动，这里我们只讨论质点.

- **第一定律** 不受力或受合力为零的质点做匀速直线运动或静止.
- **第二定律** 质点所受合外力等于质点的质量乘以加速度.
- **第三定律** 两质点的相互作用力等大反向.

第一定律

牛顿第一定律的作用是定义**惯性坐标系 (Inertial frame of reference, 简称惯性系)**: 惯性系存在, 且满足牛顿第一定律的参考系就是惯性系.

- **推论** 相对某惯性系静止或匀速运动且没有相对转动的参考系也是惯性系, 否则不是惯性系.

推论证明: 若已知 A 系为惯性系, B 系相对 A 系的平移速度为 \mathbf{v}_{AB} , 质点在两系中的瞬时速度分别记为 $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$, 则由“绝对速度 = 牵连速度 + 相对速度”得

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AB} \quad (1)$$

若 \mathbf{v}_A 与 \mathbf{v}_{AB} 都是常矢量, 那么显然 \mathbf{v}_B 也是常矢量, 即 B 系为惯性系. 若两系之间有任何相对的加速度 (包括加速平移和转动), 那么 \mathbf{v}_{AB} 将随时间或位置变化, 也就不能保证 \mathbf{v}_B 一定是常矢量, 所以 B 系就不是惯性系.

第二定律

牛顿第二定律只能在惯性系中使用, 在非惯性系中需要用惯性力^[240] 进行修正. 用矢量 \mathbf{F} 表示合力, 牛顿第二定律记为

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (2)$$

高中物理只强调圆周运动和直线运动，所以一般 F 和 a 都记为标量，请读者不要局限在高中思维。这是一条矢量表达式，加速度矢量 \mathbf{a} 是位置矢量 \mathbf{r} 关于时间的二阶导数，或者速度矢量 \mathbf{v} 关于时间的导数。加速度和速度不必共线也不必垂直。

动量定理

牛顿本人对第二定律的表述使用了动量定理^[231]，记质点的动量为 \mathbf{p} ，则

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (3)$$

在经典力学中，由于质量不发生变化，式 2 和式 3 是等效的，但令人惊讶的是，牛顿所用的形式在狭义相对论中仍然成立¹，而式 2 却不成立。

第三定律

广义来说，牛顿第三定律就是动量守恒定律^[262]。牛顿第三定律在任何参考系中都适用，但是要注意两点。第一，在非惯性系中，由于惯性力作为一个数学上的修正，并不是真正的力，所以不存在反作用力。第二，在考虑电磁力时，由于电磁场可能具有动量，所以动量守恒定律要求所有物体与电磁场的动量之和守恒，而不仅仅是质点的总动量守恒。在考虑两带电粒子的相互作用力时，若假设粒子的运动速度较慢，则磁场可以忽略，电磁场动量始终为零，此时两粒子的总动量守恒，相互作用力等大反向。

圆周运动的向心力

预备知识 圆周运动的加速度^[205]，牛顿运动定律^[220]

在惯性参考系中，质点的运动符合牛顿第二定律 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 。所以要使一个质点做半径为 R 的圆周运动，那么我们就可以把任意时刻圆周运动的加速度矢量（式 4^[205]）乘以质量 m 得到它该时刻受到的合力。我们把这个力叫做向心力（centripetal force）。

$$\mathbf{F}_c = -m\omega^2\mathbf{r} = -\frac{mv^2}{r}\hat{\mathbf{r}} = m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (1)$$

¹在狭义相对论中，动量的定义有所不同。

我们需要注意区分向心力和离心力^[243]，向心力不是圆周运动给物体施加的力，而是维持圆周运动所需要的力。如果我们使用惯性参考系，就不存在离心力的概念。只有当我们使用旋转的参考系（非惯性系），才能讨论离心力，因为离心力是一种惯性力^[240]，是在非惯性系中讨论物体运动的一个数学工具。

那么为什么例如在车转弯的时候我们会感觉有离心力把我们向外推呢？事实上人的惯性使得人有继续保持直线运动的倾向，而车突然改变方向偏离原来的直线，所以在地面惯性系看来是车在向内推人，但人因身处车中，本能地觉得车是静止的，以为牛顿第二定律仍然成立，所以感觉自己受到了一种无形的离心力。这是一种错觉，就像我们本能地认为光是沿直线传播，所以会觉得伸进水中的筷子被折弯了，或者觉得镜子里面还有一个空间。

有趣的推导

为了更好地理解为何向心力会产生圆周运动，我们可以假设一个小球在光滑水平面运动的过程中被反弹若干次，使得它的轨道称为闭合的正 N 边形，每个顶点距离中心为 R 。每次撞击后，速度不变，方向改变 $2\theta = 2\pi/N$ 。

未完成：图

所以在每次碰撞时，我们可以把速度垂直分解为径向（指向圆心）和角向速度。碰撞后角向速度不变，径向速度增量为 $2v \sin \theta$ ，即动量改变为

$$\Delta p = 2mv \sin \theta \quad (2)$$

正 N 边形每条边的长度为 $L = 2R \sin(\theta)$ ，所以相邻两次碰撞的时间为

$$\Delta t = \frac{2R \sin \theta}{v} \quad (3)$$

我们可以令 $N \rightarrow \infty$ ，这样，多边形轨迹就趋近于圆周运动，每次撞击时，冲量趋近于 0，时间间隔也趋近于 0，我们就可以把这些离散的撞击看成时一个连续的力。平均来说，力的大小等于动量改变除以时间

$$F_c = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R \quad (4)$$

注意该式甚至不需要取极限 $\Delta t \rightarrow 0$ 就可以成立。

未完成：例题和习题

重力 重量

预备知识 万有引力^[221]，圆周运动的向心力^[221]

一般来说，重力的定义并不明确。有的地方直接把一个质点在某点的万有引力（**gravity**）定义为重力。但另一些情况下把弹簧秤的度数定义为重力（例如在地面参考系）。为了区分，我们建议不要使用“重力”，而是直接将前者称为（万有）引力，后者称为**重量（weight）**或者**视重**。英语中，“重力”并没有单独对应的词汇。

什么情况下引力会和重量不同？答案是当质点（在惯性系中）具有加速度时。最常见的例子就是地球表面虽然可以近似为惯性系，但严格来说却不是，所以相对地面静止的一点在惯性系中具有加速度。如果只考虑地球的自转产生的加速度²，那么地表任意一个相对静止的点³在（相对地轴静止的）惯性系中都会做圆周运动，它的加速度等于向心加速度。

惯性系中的分析

为了方便，我们先选取与地轴相对静止的惯性系分析。当一个相对地表静止的质点挂在弹簧秤上达到平衡时，它所受的引力 \mathbf{G} 和弹簧对它的拉力 \mathbf{T} （或者台秤的支持力）的合力提供圆周运动的向心力^[221]。

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{G} + \mathbf{T} \quad (1)$$

所以不妨定义重量矢量为弹簧拉力的逆矢量

$$\mathbf{F}_w = -\mathbf{T} = \mathbf{G} - \mathbf{F}_c \quad (2)$$

那么重量，也就是弹簧秤的示数大小就是模长 $F_w = |\mathbf{F}_w|$ 。

可以看出，当质点无加速度（ $\mathbf{F}_c = \mathbf{0}$ ）时，重量矢量与引力相等。

（未完成：计算一下重力加速度）

²地球绕太阳系公转的加速度远小于自转，一般可忽略不计，有兴趣的读者可以自行计算。

³除了两个极点

地表参考系中的分析

预备知识 离心力^[243]

非惯性系中，保持平衡的条件同样是合力为零，但合力要包括惯性力。在地表参考系，惯性力就是地球自转的离心力 \mathbf{F}'_c 。

$$\mathbf{G} + \mathbf{T} + \mathbf{F}'_c = \mathbf{0} \quad (3)$$

由于离心力刚好与向心力相反，即 $\mathbf{F}'_c = -\mathbf{F}_c$ ，代入后仍然可以得到式 1。注意离心力并不真的存在，只是一个数学上的“把戏”。

功 功率

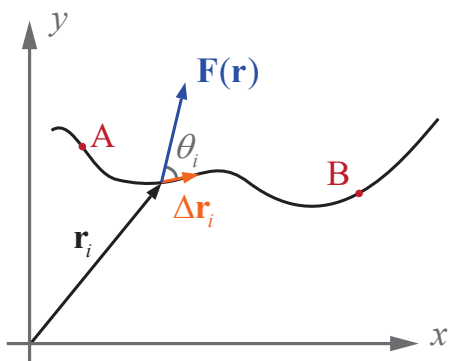
预备知识 矢量的内积^[146]，定积分^[111]

图 1: 在一小段位移中，把变力看做恒力

如图 1，当质点沿着曲线运动时，有一个力作用在其上，当质点的位置为 \mathbf{r} 时，力为 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 。下面求质点从点 A 运动到点 B 的过程中，力对质点的做功。

把从 A 到 B 这段曲线看成由许多小位移 $\Delta\mathbf{r}_1, \Delta\mathbf{r}_2 \dots \Delta\mathbf{r}_n$ 组成，对其中第 i 个进行分析。由于 $\Delta\mathbf{r}_i$ 很短，质点经过 $\Delta\mathbf{r}_i$ 的过程中位矢 \mathbf{r} 几乎不变，记为常矢量 \mathbf{r}_i 。在这小段中， $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 也可以近似看成是恒力 $\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)$ 。

现在把 $\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)$ 分解成垂直于 $\Delta\mathbf{r}_i$ 和平行于 $\Delta\mathbf{r}_i$ 的两个正交分量，其中垂直分量不做功，平行分量的大小为 $|\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)| \cos \theta_i$ ，该分量做功大小为

$$\Delta W_i = |\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)| |\Delta\mathbf{r}_i| \cos \theta_i \quad (1)$$

上式可以表示成矢量内积^[146]的形式

$$\Delta W_i = \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i \quad (2)$$

把上式对所有的 i 求和, 就得到了做功的近似表达式

$$W_{ab} = \sum_{i=1}^n \Delta W_i \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i \quad (3)$$

事实上, 当曲线分割的越细, 即 n 越大时, 上式就越精确地成立. 类比定积分^[111]中的介绍, 令 $n \rightarrow \infty$, 把求和符号换成积分符号, 把表示增量的 Δ 换成微分符号 d , 则不等号可以变为等号.

$$W_{ab} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i = \int_{C_{ab}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (4)$$

不同于一元函数的积分, 这一类特殊的积分叫做**线积分**, 详见“线积分^[??]”.

力的功率

功率(瞬时)的定义为做功的变化率, 即

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \quad (5)$$

根据式 2, 力的功率为

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t_i} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (6)$$

动能 动能定理 (单个质点)

预备知识 功 功率^[224], 牛顿第二定律^[220]

令质点的质量为 m , 速度^[202] 为 \mathbf{v} , 则质点的动能定义为

$$E_k = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} m v^2 \quad (1)$$

注意这里的 $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ 表示速度矢量和自身的内积^[??], 结果等于其模长的平方.

定理 1 质点动能定理

一段时间内质点动能的变化等于合外力对质点做的功. 从变化率(即时间导数)的角度来看, 动能定理也可以表述为质点的动能变化率等于合外力对质点的功率.

推导

力对质点做功的功率^[224]为

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (2)$$

再来看动能的变化率

$$\frac{d}{dt} E_k = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \quad (3)$$

由“矢量内积的求导^[221]”??, $d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})/dt = 2\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}/dt = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$, 上式变为

$$\frac{d}{dt} E_k = m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (4)$$

最后一步使用了牛顿第二定律 (式 2^[220]). 注意式 2 与式 4 相等, 所以动能变化率等于合外力的功率.

力场 势能

预备知识 矢量场^[221], 功^[224], 牛顿—莱布尼兹公式^[115]

力场

高中物理中我们已经学过一些场的概念, 即质点受场的力取决于质点在场中的位置. 例如地球表面局部的引力场可以近似看做一个恒力场 (称为重力场), 即在一定区域内, 质点总受向下的, 大小恒为 mg 的重力 (矢量式 $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$). 又例如水平面上一根原长忽略不计的弹簧, 一端固定在原点, 另一端连接质点, 那么质点受力总指向原点, 大小等于劲度系数和位矢模长的之积 kr . 用矢量的方法表示, 就是 $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$.

总结到一般情况, 力场可以用场对质点施加的力 (矢量) 关于质点位置 (即位矢^[198]) 的矢量函数表示, 所以力场是一种矢量场.

例 1 引力场

球坐标原点处质量为 M 的质点在周围造成的引力场为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1)$$

若位矢用 \mathbf{r} 来表示 ($\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}}$), 则

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{r^3} \mathbf{r} \quad (2)$$

现在变换到直角坐标系中, 有

$$\begin{cases} \mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}} \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases} \quad (3)$$

代入上式, 展开得

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GMx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{x}} - \frac{GM y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{y}} - \frac{GM z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \quad (4)$$

显然球坐标系中的引力场表达式比直角坐标系中的要简洁得多. 由此可见, 对不同的矢量场选择适当的坐标系往往可以简化问题.

若质点从场的一点移动到另一点的过程中, 力场对质点做的功^[224] 只与初末位置有关, 而与质点移动的路径无关, 那么这个力场就是一个**保守场**. 这时我们可以给该质点定义一个**势能函数**, 势能函数是一个关于位矢的标量函数, 一般记为 $V(\mathbf{r})$, 具有能量量纲. 当质点从一点以任意路径移动到另一点时, 场对质点做的功等于质点初位置的势能减末位置的势能, 即

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2) \quad (5)$$

一维势能函数

现在先假设质点只能沿一条直线运动, 且力也始终与直线平行. 显然质点从一点到另一点的路径只可能有一条, 所以任何一维力场都是保守场. 若给直线定义一个正方向, 单位矢量为 $\hat{\mathbf{x}}$, 任何一维力场可以记为

$$\mathbf{F}(x) = F(x) \hat{\mathbf{x}} \quad (6)$$

质点的位置矢量可记为 $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}}$. 由于 $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 1$, 质点从 $x = a$ 移动到 $x = b$ 过程中场做的功为

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F(x) dx \quad (7)$$

根据势能的定义, 对任意的 a 和 b , 上式应该等于 $V(a) - V(b)$. 根据牛顿—莱布尼兹公式^[115], 势能函数恰好就是 $F(x)$ 的负原函数, 所以 $F(x)$ 是 $V(x)$ 负导函数.

$$V(x) = - \int F(x) dx \quad F(x) = - \frac{dV(x)}{dx} \quad (8)$$

需要注意的是, 由于原函数有无穷多个 (由不定积分中任意常数的取值决定), 所以势能函数也存在无穷多个, 且都相差一个常数. 为了确定势能函数, 我们需要指定场中某一点的势能值, 如果令某点势能为零, 那么这点就叫做**零势点**.

例 2 弹簧的势能

一个原长可忽略的轻弹簧劲度系数为 k , 一端固定在原点, 另一端连接质点. 质点只能沿 \hat{x} 方向运动, 规定质点在原点时势能为 0, 求弹簧的势能关于质点位置坐标 x 的函数.

由题意, 式 6 中 $F(x) = -kx$, 不定积分并取负值得到含有待定常数的势能函数

$$V(x) = - \int (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2 - C \quad (9)$$

为了确定待定常数, 代入 $V(0) = 0$, 解得 $C = 0$. 所以所求势能为

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (10)$$

多维势能函数

预备知识 梯度定理^[??]

假设力场 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 是平面或三维空间中的保守场, 对应势能为 $V(\mathbf{r})$, 初始点为 \mathbf{r}_i , 终点为 \mathbf{r}_f . 对 $-V(\mathbf{r})$ 使用梯度定理^[??] 得

$$\int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \nabla[-V(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{l} = V(\mathbf{r}_i) - V(\mathbf{r}_f) \quad (11)$$

我们把该式与式 5 比较, 不难发现力场是势能函数的负梯度

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (12)$$

即在保守场的某点中，力的方向是势能下降最快的方向，大小是该方向的负方向导数。由梯度的定义，力场的各个分量分别为对应方向的负偏导数

$$F_x(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial x} \quad F_y(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial y} \quad \dots \quad (13)$$

例 3 二维简谐振子

若已知二维的势能函数为 $V(x, y) = k_1(x + y)^2/2 + k_2(x - y)^2/2$ ，求力场。若已知场函数求势能函数，又该如何求？

把势能函数代入式 13 中，求偏导，得场为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \\ &= -[(k_1 + k_2)x + (k_1 - k_2)y] \hat{\mathbf{x}} - [(k_1 - k_2)x + (k_1 + k_2)y] \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (14)$$

现在我们根据“梯度定理^[??]”中的??从场逆推势能。首先对力场的 x 分量和 y 分量分别关于 x 和 y 做不定积分得到任意两个原函数并记为 G_x 和 G_y 得

$$G_x(x, y) = -\frac{1}{2}(k_1 + k_2)x^2 - (k_1 - k_2)xy \quad (15)$$

$$G_y(x, y) = -(k_1 - k_2)xy - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)y^2 \quad (16)$$

代入得（注意这里的场是势能函数的的负梯度而不是梯度，另外注意下式中的常数项都并入 C 中）

$$\begin{aligned} V(x, y) &= -G_y(x, y) + G_y(x, y_0) - G_x(x, y_0) + C \\ &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x^2 + (k_1 - k_2)xy + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)y^2 + C \\ &= \frac{1}{2}k_1(x + y)^2 + \frac{1}{2}k_2(x - y)^2 + C \end{aligned} \quad (17)$$

若规定零势点 $V(0, 0) = 0$ ，代入上式得 $C = 0$ 。

两质点间的势能

如果两质点 A 和 B 的位矢分别为 \mathbf{r}_A 和 \mathbf{r}_B ，相对位移为 $\mathbf{R} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ ，两质点距离为 $R = |\mathbf{R}|$ 。且 A 对 B 的作用力为 $\mathbf{F} = F(R)\hat{\mathbf{R}}$ ， B 对 A 的反作用力为 $-\mathbf{F}$ 。现在考虑一个过程中力对两质点做的总功。

在一段微小时间 dt 内, 两质点分别移动了 $d\mathbf{r}_A$, 和 $d\mathbf{r}_B$, 则相互作用力对二者做功为

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_B + (-\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r}_A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = F(R)\hat{\mathbf{R}} \cdot d\mathbf{R} = F(R) dR \quad (18)$$

(最后一步的证明见“位置矢量^[198]”中的例 1) 定积分得

$$W = \int_{R_1}^{R_2} F(R) dR \quad (19)$$

现在我们借用一维势能的定义式 8 来定义势能函数为 $F(R)$ 的负原函数, 则力在一段时间内对两质点做的总功就等于末势能减初势能

$$W = V(R_2) - V(R_1) \quad (20)$$

含时势能

以上的讨论中, 我们默认力场的分布不随时间变化, 所得势能显然也不随时间变化. 但在一些情况下, 我们也可以定义随时间变化的势能.

机械能守恒 (单个质点)

预备知识 动能定理^[225], 势能^[226]

若质点只受不随时间变化的保守力作用⁴, 那么物体在某段时间内从 A 点移动到 B 点, 力场对物体做功能等于初末势能函数之差

$$W_{AB} = V(\mathbf{r}_A) - V(\mathbf{r}_B) \quad (1)$$

而根据动能定理, 力场对质点做功等于质点的末动能减初动能

$$W_{AB} = E_{kB} - E_{kA} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \quad (2)$$

结合以上两式, 得

$$E_{kA} + V(\mathbf{r}_A) = E_{kB} + V(\mathbf{r}_B) \quad (3)$$

我们现在定义质点在某个时刻的动能加势能为**机械能**. 上式就是单个质点机械能守恒的表达式.

⁴即势能函数不随时间变化

动量 动量定理（单个质点）

预备知识 牛顿第二定律^[220]

令质点质量为 m ，速度为 \mathbf{v} ，定义其动量为

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (1)$$

注意动量是矢量，与速度（矢量）的方向相同，且取决于坐标系。

现在把动量和速度都看做时间的函数。等式两边求导，速度对时间的导数等于加速度 \mathbf{a}

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \quad (2)$$

根据牛顿第二定律， $m\mathbf{a}$ 等于质点所受合外力 \mathbf{F} （注意力和加速度也都是时间的函数），所以

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (3)$$

这就是**动量定理**，即动量的变化率等于合外力。在牛顿力学中，动量定理和牛顿第二定律是完全等效的。

动量定理也可以写成微分形式

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F} dt \quad (4)$$

也就是在极微小时间内的动量变化等于力乘以这段时间。

现在用定积分^[111]中的微元思想考虑动量从时刻 t_1 到 t_2 的总变化，我们可以把这段时间划分为 N 段微小时间，第 i 段所在的时刻记为 t_i ，每小段时间内 \mathbf{F} 可认为是恒力 $\mathbf{F}(t_i)$

$$\mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) = \sum_{i=1}^N \Delta\mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}(t_i) \Delta t_i \quad (5)$$

当 $N \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0$ 时该式可以用定积分（矢量函数）表示⁵

$$\mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt \quad (6)$$

⁵通常省略以上的推导而直接表达为“式4两边定积分得到式6”

这是动量定理的积分形式. 特殊地, 对于恒力 \mathbf{F} , 右边的积分等于 $(t_2 - t_1)\mathbf{F}$, 上式记为

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F} \Delta t \quad (7)$$

角动量 角动量定理 角动量守恒 (单个质点)

预备知识 牛顿第二定律^[220], 力矩^[265]

质点的角动量

一个质点的质量为 m , 某时刻速度为 \mathbf{v} , 则其动量为 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. 在三维空间中建立坐标系, 原点为 O , O 点到质点的位置矢量为 \mathbf{r} . 定义该质点关于 O 点的角动量为

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (1)$$

由叉乘的几何定义^[149]可知, 当速度与位矢平行时角动量为 $\mathbf{0}$, 垂直时角动量模长为距离和动量模长的积 $L = rp$.

角动量定理

令质点在某时刻受到的力矩^[265]为 $\boldsymbol{\tau}$, 可以证明

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \quad (2)$$

这就是 (单个质点的) 角动量定理.

特殊地, 若质点受到的力矩为零, 则 $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{0}$, 即角动量不随时间变化. 这个现象叫做 (单个质点的) 角动量守恒. 由力矩的定义, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, 可见以下两种情况下力矩为零, 角动量守恒.

1. 质点受合力 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, 即质点静止或做匀速直线运动.
2. \mathbf{F} 与 \mathbf{r} 同向, 即质点只受关于 O 点的有心力.

证明

我们来证明单个质点的角动量定理. 令质点的速度为 $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, 加速度为 $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, 叉乘的求导法则 (??^[220]) 与标量乘法求导类似, 牛顿第二定律^[220] 为 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, 两个同方向矢量叉乘^[149] 为零,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt} = m \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{v})}{dt} = m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \\ &= m(\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a}) = \mathbf{r} \times (m\mathbf{a}) \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (3)$$

证毕.

简谐振子

预备知识 胡克定律, 牛顿第二定律^[220]

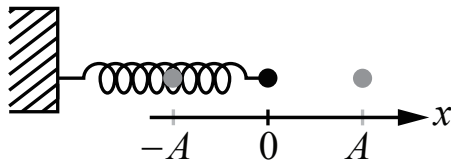


图 1: 简谐振子模型

如图 1, 质量为 m 的质点固定在弹性系数为 k 的弹簧的一端, 弹簧另一端固定. 在 $t = 0$ 时, 若质点不在平衡位置, 或者有一个初速度, 则接下来会发生振动 (忽略弹簧的质量, 任何摩擦以及重力). 以质点拉伸弹簧的方向为 x 轴正方向, 质点的平衡位置为 $x = 0$. 当质点在位置 x 时, 根据胡克定律, 受力为 $F = -kx$. 根据牛顿第二定律^[220] $F = ma = m\ddot{x}$ (\ddot{x} 代表对时间的二阶导数). 两式消去 F , 得

$$m\ddot{x} = -kx \quad (1)$$

这是一个单变量函数 $x(t)$ 与其二阶导数的关系式. 我们把这样含有单变量函数及其导数或高阶导数的等式叫做常微分方程. 由于上式中最高阶导数是二阶, 所以叫做二阶微分方程. 要解该方程, 就是要寻找一个函数 $x(t)$, 使它的二阶

导数与 $-x(t)$ 成正比, 比例系数为 k/m . 注意到 $\cos'' t = -\cos t$ 具有类似的性质⁶, 不妨继续猜测 $x = \cos(\omega t)$, 则 $\ddot{x} = -\omega^2 \cos \omega t$. 所以只要令 $\omega = \sqrt{k/m}$ 即可满足方程. 这说明, 弹簧的振动可以用余弦函数来描述. 但是这只是方程的一个解. 任意情况的振动可以表示为以下函数 (令 A 和 ϕ_0 为两个任意实数)

$$x = A \cos(\omega t + \phi_0) \quad (\omega = \sqrt{k/m}) \quad (2)$$

这叫做微分方程式 1 的通解 (系统的方法参考二阶常系数齐次微分方程的通解^[125]), 即无论常数 A, ϕ_0 取任意值, 微分方程总能得到满足.

满足这种形式的运动叫做简谐运动 (或简谐振动). 其中 A 为振幅, $\omega t + \phi_0$ 为相位, ϕ_0 为初相位 (即 $t = 0$ 时刻的相位). 但是如何决定 A 和 ϕ_0 呢? 根据上面给出的条件还不能判断. 由于有两个待定常数, 我们需要两个额外条件才能解出. 常见的情况是给出初始时刻 $t = 0$ 时质点的位置 $x(0)$ 和速度 $\dot{x}(0)$, 这就叫做初值条件.

例如给出 $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$, 把方程的通解代入, 得 $A \cos \phi_0 = 0$, $-A\omega \sin \phi_0 = v_0$, 解得 $\phi_0 = \pi/2$, $A = -v_0/\omega$. 所以

$$x = -v_0/\omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = v_0 \sin \omega t \quad (\omega = \sqrt{k/m}) \quad (3)$$

能量

简谐振子的总能量等于质点动能加弹簧的弹性势能. 当位移最大时, 势能为 0, 总能量等于动能, 位移为 0 时势能为 0, 总能量等于势能.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (4)$$

其中 v_0 是质点经过原点处的速度.

受阻落体

⁶ $\sin t$ 也有同样的性质, 所以下讨论对 $\sin t$ 也成立

预备知识 匀加速运动^[209]

在自由落体的基础上，若假设质点受到的空气阻力的大小与其速度成正比，比例系数为 α ，那么根据牛顿第二定律^[220] 可以列出动力学方程（假设向下为正方向）

$$ma = F = mg - \alpha v \quad (1)$$

考虑到加速度是速度的导数，上式变为

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\alpha}{m}v \quad (2)$$

这是速度关于时间的函数 $v(t)$ 与其一阶导数 $\dot{v}(t)$ 的关系式，即微分方程^[123]。与自由落体问题不同的是，这个方程的右边含有未知函数 $v(t)$ ，所以不可能直接将等式两边积分解得 $v(t)$ 。我们可以根据微分与导数的关系，将上式两边同乘 dt 并整理得

$$\frac{1}{g - \alpha v/m} dv = dt \quad (3)$$

这样我们就得到了 v 和 t 的微分^[92] 关系，即每当 t 增加一个微小量时，如何求 v 对应增加的微小量。注意等式左边仅含 v ，右边仅含 t ，所以这一步叫做**分离变量**，我们称**式 2** 为**可分离变量**的微分方程。假设 v 和 t 之间的关系可以表示为

$$F(v) = G(t) \quad (4)$$

那么对等式两边微分即可得到**式 3** 的形式。令 $f(v)$ 和 $g(t)$ 分别为 $F(v)$ 和 $G(t)$ 的导函数，有

$$f(v) dv = g(t) dt \quad (5)$$

对比**式 3** 可得 $f(v) = 1/(g - \alpha v/m)$ 和 $g(t) = 1$ ，把二者做不定积分^[101] 得原函数。首先显然 $G(t) = t + C_1$ 。对 $f(v)$ 积分可用“积分表^[106]”中的**式 1** 和 **式 3** 得

$$F(v) = -\frac{m}{\alpha} \ln \left| g - \frac{\alpha}{m}v \right| + C_2 = -\frac{m}{\alpha} \ln \left(g - \frac{\alpha}{m}v \right) + C_2 \quad (6)$$

上式中绝对值符号可去掉是因为在**式 2** 中根据物理情景可知 dv/dt 始终大于零。把两原函数代回**式 4**（这时可以把 C_1 和 C_2 合并为一个待定常数 C ），整理可得

$$v = \frac{m}{\alpha} \left(g - e^{-\alpha C/m} e^{-\alpha t/m} \right) \quad (7)$$

这就是微分方程式 2 的通解，可代入原微分方程以验证是否成立。以后我们把以上这种由式 5 形式求式 4 形式的步骤简称为“对方程两边积分”。由于方程阶数为 1，通解仅含有一个待定常数。为了确定这个待定常数，我们用题目给出的初值条件，即 $t = 0$ 时 $v = 0$ ，代入通解可解得 C ，再把 C 代回通解得满足初始条件的特解

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t/m}) \quad (8)$$

从该式可以看出，当 $t = 0$ 时，质点速度为 0，符合初始条件，而当 $t \rightarrow +\infty$ 时， $v(t) \rightarrow mg/\alpha$ 。可见质点的速度会无限趋近一个最大值，而这个最大值恰好可以使阻力 αv 等于重力 mg 。利用这一条件，即使不解微分方程，也可以很快算出质点的末速度。

单摆

预备知识 简谐振子^[233]，匀速圆周运动^[205]

理想的单摆由一个质点和一个质量不计的细绳（或细杆）组成。绳的一头连接质点，另一头固定不动。我们来对单摆做受力分析。如图 1，令质点质量为 m ，受重力大小为 mg ，受绳的拉力大小为 T 。将重力沿与绳平行的方向和垂直的方向正交分解，分力大小分别为 $mg \cos \theta$ 和 $mg \sin \theta$ 。由于绳的限制，质点只允许做圆周运动，所以绳的拉力与重力平行绳的分量必然提供质点的向心力。

$$T - mg \cos \theta = ma_c \quad (1)$$

对于变速圆周运动，向心加速度仍然可以用 $a_c = v^2/L$ 求解，其中 L 是绳长即圆的半径（证明见“变速圆周运动”）。在求单摆运动时，拉力 T 的大小并不重要，我们更关心的是摆角 θ 随时间的变化。

令质点向右运动时速度为正，角速度和速度的关系为 $\dot{\theta} = v/L$ ，对其两边求导得角加速度和加速度的关系

$$\ddot{\theta} = a_\theta/L \quad (2)$$

其中 a_θ 是质点延垂直绳方向的加速度。现在沿垂直绳方向运用牛顿第二定律，

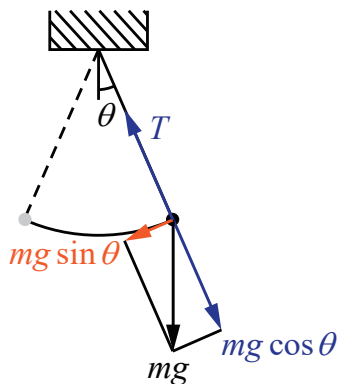


图 1: 单摆

并代入上式中的 a_θ 得

$$-mg \sin \theta = ma_\theta = -m\ddot{\theta}L \quad (3)$$

两边消去质量可得摆角 θ 关于时间的二阶微分方程.

$$L\ddot{\theta} = -g \sin \theta \quad (4)$$

解出该方程即可得到单摆做任意幅度摆动的规律. 虽然我们还不知道方程的解, 但观察方程可知单摆的运动规律只与摆长 L 和重力加速度 g 有关, 而与质点的质量无关. 所以改变同一单摆的质量不会改变它的运动规律.

小幅度摆动

预备知识 小角正弦值极限^[72]

遗憾的是, 式 4 的解并不能用有限个基本初等函数表示, 而是需要使用椭圆积分^[22]. 我们先来考虑一种简单的情况, 即单摆进行小的幅度摆动. 当 $\theta \rightarrow 0$ 时, 可以把式 4 中的 $\sin \theta$ 近似为 θ . 令质点从最低点到当前位置之间的弧长为 s , 则有 $s = \theta L$ 和 $\ddot{s} = a_\theta = \ddot{\theta}L$, 式 4 变为 s 的微分方程

$$\ddot{s} = -\frac{g}{L}s \quad (5)$$

观察该式可以发现其结构与简谐振子的微分方程 (式 1^[233]) 非常相似. 用同样的方法, 可得通解为

$$s = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (\omega = \sqrt{g/L}) \quad (6)$$

考虑到 $\theta \rightarrow 0$ 的情况下, 圆弧可以近似为线段, 所以可以认为此时质点在做一维简谐运动, 用坐标 x 代替弧长 s .

圆锥摆

- 本词条处于草稿阶段.

预备知识 圆周运动的向心力^[221]

质量不计的细线一端固定, 另一端连接一个质点质量为 m . 细线与竖直方向夹角为 θ , 质点做圆周运动.

未完成: 图

我们令 $\alpha = \pi/2 - \theta$

$$T \sin \alpha = mg \quad (1)$$

$$T \cos \alpha = m\omega^2 R \cos \alpha \quad (2)$$

解得圆周运动的角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R \cos \theta}} = \sqrt{\frac{T}{mR}} \quad (3)$$

可见张角 θ , 张力 T 和角速度 ω 之间只有一个自由度^[249].

傅科摆

预备知识 单摆^[236]

傅科摆是首个直接证明地球自转的实验. 试想如果把一个不受任何阻力的单摆放在地球的北极, 那么地球每自转一定角度, 单摆的摆平面不变, 所以以地球为参考系观察, 摆平面将反方向转动, 这样就能证明地球在自转. 现实中, 为了能克服阻力和微扰长时间摆动, 通常使用质量较大, 摆臂较长的摆作为傅科摆.

但若傅科摆被放在北纬 α 角处, 摆平面的将会以怎样的角速度转动呢? 事实证明, 若令地球自转的角速度为 ω_0 , 则单摆相对地面转动的角速度 ω 将等于

$$\omega = \omega_0 \sin \alpha \quad (1)$$

傅科摆角速度的一种几何推导

预备知识 矢量叉乘^[149]

设 \mathbf{R} 为地心指向傅科摆的矢量, 当地纬度为 α , 地轴指向北的单位矢量为 $\hat{\mathbf{k}}$, 显然 $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{R}} = \sin \alpha$.

若把任意矢量 \mathbf{P} 围绕某单位矢量 $\hat{\mathbf{M}}$ 以右手定则旋转角微元 $d\theta$, 有

$$d\mathbf{P} = \hat{\mathbf{M}} \times \mathbf{P} d\theta \quad (2)$$

开始时, 令傅科摆在最低点的速度方向的单位向量为 $\hat{\mathbf{A}}$ ($\hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{R} = 0$), 在傅科摆下方的水平地面上标记单位向量 $\hat{\mathbf{B}}$, 使开始时 $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{A}}$. 当傅科摆随地球在准静止状态下移动位移 $d\mathbf{s}$ ($d\mathbf{s} \cdot \mathbf{R} = 0$) 后, 由式 2 可得

$$d\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{M}} \times \hat{\mathbf{A}} \cdot d\theta = \frac{\mathbf{R} \times d\mathbf{s}}{|\mathbf{R} \times d\mathbf{s}|} \times \hat{\mathbf{A}} \frac{ds}{R} \quad (3)$$

注意这只是一个比较符合物理直觉的假设, 这里并不给出证明. 当地球转动 $d\theta$ 时, 上式中 $d\mathbf{s} = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{R} d\theta$, 而地面上的标记 $\hat{\mathbf{B}}$ 也围绕地轴转动, 所以 $d\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{A}} d\theta$.

下面计算 $d\hat{\mathbf{A}} - d\hat{\mathbf{B}}$. 因为 $\mathbf{R} \cdot d\mathbf{s} = 0$, 所以 $|\mathbf{R} \times d\mathbf{s}| = R ds$, 所以

$$\begin{aligned} d\hat{\mathbf{A}} &= \frac{\mathbf{R} \times d\mathbf{s}}{R^2} \times \hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{R^2} \mathbf{R} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{R} d\theta) \times \hat{\mathbf{A}} \\ &= \hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{R}}) \times \hat{\mathbf{A}} d\theta = [(\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{k}} - (\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{k}})\hat{\mathbf{R}}] \times \hat{\mathbf{A}} d\theta \\ &= (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{R}} \sin \alpha) \times \hat{\mathbf{A}} d\theta \end{aligned} \quad (4)$$

$$d\hat{\mathbf{A}} - d\hat{\mathbf{B}} = (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{R}} \sin \alpha) \times \hat{\mathbf{A}} d\theta - \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{A}} d\theta = -\sin \alpha \hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{A}} d\theta \quad (5)$$

所以地球转过 $d\theta$ 角以后, $\hat{\mathbf{A}}$ 与 $\hat{\mathbf{B}}$ 之间的夹角为

$$d\gamma = \left| d\hat{\mathbf{A}} - d\hat{\mathbf{B}} \right| = \sin \alpha d\theta \quad (6)$$

两边除以 dt 得角速度

$$\omega = \omega_0 \sin \alpha \quad (7)$$

惯性力

预备知识 牛顿第二定律^[220]，加速度的坐标系变换^[215]

若一个质点 m 某时刻在惯性系 S 中的加速度为 \mathbf{a}_S ，在另一个非惯性系 S' 中的加速度为 $\mathbf{a}_{S'}$ ，则可假设质点受到一个惯性力

$$\mathbf{f} = m(\mathbf{a}_{S'} - \mathbf{a}_S) \quad (1)$$

使得牛顿运动定律在非惯性系 S' 中仍然成立。惯性力作为一个数学工具，既没有施力物体，也不是真实的力。另外，惯性力取决于参考系的选取甚至质点的运动，真实的受力不依赖于参考系。

例 1 加速的电梯

在向上加速的电梯中，电梯给人的支持力大于人的重力。这在地面参考系（惯性系）中的解释是，电梯给人的支持力除了要抵消人的重力，还要提供额外的向上的力使人产生向上的加速度。但是人从直觉上认为自己所处的是惯性系，符合牛顿运动定律。那么唯一合理的解释就是自己被施加了额外的向下的力。为了使自己保持“静止”或“受力平衡”，电梯会给人一个额外的支持力。

例 2 转弯的车

车向左转时人感觉到向右的“离心力”。同样，这一现象在地面参考系中解释，是车为了使人具有向左的向心加速度，给人一个向左的力，同时人对车施加一个向右的反作用力。然而，车中的人直觉上认为自己所处的是惯性系，符合牛顿运动定律，那么唯一合理的解释就是自己受到了向右的“离心力”。为了使人保持“静止”或“受力平衡”，车必须给人一个向左的反作用力。

从这两个例子可以看出，如果要使牛顿运动定律在非惯性系中也成立，则需要假设一些力的存在，即惯性力。人的直觉总会假设自己的参考系是惯性系，这就解释了为什么日常生活中我们常说离心力却不说向心力。用离心力来描述现象并没有错，这只是从更符合直觉的非惯性系的角度来分析而已。

平动非惯性系

假设某个非惯性系 S' 相对于惯性系 S 没有旋转只有平移, 且 t 时刻的相对加速度为 $\mathbf{a}(t)$. 这样, S' 中的任何一个静止点相对于 S 系的加速度都是 $\mathbf{a}(t)$. 设 S' 系中有一质点 m , 相对于 S' 系的加速度为 $\mathbf{a}_{S'}(t)$, 那么在惯性系中质点的加速度为

$$\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_{S'} + \mathbf{a} \quad (2)$$

即绝对加速度⁷等于相对加速度加牵连加速度. 运用牛顿第二定律得质点真实的受力为 (注意真实受力不随参考系变化)

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_S = m(\mathbf{a} + \mathbf{a}_{S'}) \quad (3)$$

非惯性系中的观察者假设自己的参考系中牛顿定律仍然成立, 并假设存在惯性力 \mathbf{f} , 对于某个质点有

$$\mathbf{F} + \mathbf{f} = m\mathbf{a}_{S'} \quad (4)$$

所以

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a}_{S'} - \mathbf{F} = -m\mathbf{a} \quad (5)$$

这说明, 平动非惯性系中任何一个物体受到的惯性力大小与质量和非惯性系的加速度的乘积成正比, 方向与相对加速度方向相反.

在例 1 中, 电梯的参考系就是一个平动的非惯性系. 如果人站在一个弹簧秤上, 秤的示数将等于人的体重加上惯性力 ma (电梯向上加速时 a 取正值). 这用惯性力来解释, 就是静止的人受到与电梯加速度方向相反的惯性力, 大小等于 ma (注意在电梯参考系中人没有加速度, 所以是“受力平衡”的).

非平动参考系

非平动参考系相对于惯性系除了平移运动还可能做旋转运动. 对于非平动参考系, 式 2 并不满足 (即使把 \mathbf{a} 看做位置和时间的函数), 以后在“科里奥利力^[244]”中我们会推导 \mathbf{a}_S 和 $\mathbf{a}_{S'}$ 间的具体关系. 所以我们不能得到式 5. 由式 3 和式 4, 对任何非惯性系都成立的结论只有

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a}_{S'} - \mathbf{F} = m(\mathbf{a}_{S'} - \mathbf{a}_S) \quad (6)$$

⁷这里把绝对加速度定义为任意惯性系中的测得质点的加速度. 由于不同惯性系之间的相对加速度为零, 绝对加速度与惯性系的选择无关.

所以在最一般的情况下，质点所受惯性力等于质量乘以两参考系中加速度之差。

滑块和运动斜面问题

• 本词条处于草稿阶段。

预备知识 人船模型

在滑块斜面问题的基础上，如果我们假设斜面质量为 M ，与地面无摩擦，那么滑块相对斜面的加速是多少呢？

令 x, y 为滑块水平方向和竖直方向移动的距离。 X 为斜面水平方向移动的距离。

$$x = \frac{M}{M+m}l \cos \theta \quad y = -l \sin \theta \quad X = -\frac{m}{M+m}l \cos \theta \quad (1)$$

以下介绍三种方法，都可以解得滑块相对斜面的加速度为

$$a = \ddot{l} = \frac{g \sin \theta (M+m)}{M+m \sin^2 \theta} \quad (2)$$

未完成：图

受力分析法

未完成：未完成

非惯性系法

在斜面的参考系，滑块会受到向右的惯性力 $-m\ddot{X}$ ，所以沿斜面向下使用牛顿第二定律得

$$-m\ddot{X} \cos \theta + mg \sin \theta = m\ddot{l} \quad (3)$$

解得式 2。

拉格朗日方程法

考虑动量守恒, 这个系统只有一个自由度. 我们把滑块相对斜面向下移动的距离记为 l . 为了描述系统动能和势能, 我们另外引入几个可以用 l 表示的变量: 则拉格朗日量为

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 - mgy \\ &= \frac{1}{2}m\left(1 - \frac{m\cos^2\theta}{M+m}\right)\dot{l}^2 + mg\sin\theta \cdot l \end{aligned} \quad (4)$$

代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{l}} = \frac{\partial L}{\partial l} \quad (5)$$

解得式 2.

离心力

预备知识 匀速圆周运动的加速度^[205], 惯性力^[240], 连续叉乘的化简^[154]

令参考系 abc 和 xyz 的 c 轴和 z 轴始终重合. 其中 xyz 是惯性系, abc 以恒定的角速度 ω 绕 z 轴逆时针转动. 求 abc 系中一个质量为 m 的静止质点所受的惯性力, 即离心力 (**centrifugal force**).

令质点的坐标 (a, b, c) 离 c 轴的距离为 $r_{\perp} = \sqrt{a^2 + b^2}$, 对应的径向矢量为 $\mathbf{r}_{\perp} = (a, b, 0)^T$. 在 xyz 系中, 质点做匀速圆周运动, 相对于 xyz 系的加速度 (用 abc 系的坐标表示) 为

$$\mathbf{a}_{xyz} = -\omega^2 \mathbf{r}_{\perp} = -\omega^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}_{abc} \quad (1)$$

质点相对于 abc 系静止, 相对加速度为零

$$\mathbf{a}_{abc} = \mathbf{0} \quad (2)$$

所以由惯性力^[240]中的结论，惯性力为

$$\mathbf{f} = m(\mathbf{a}_{abc} - \mathbf{a}_{xyz}) = \omega^2 \mathbf{r}_\perp = m\omega^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}_{abc} \quad (3)$$

注意离心力向外，与直觉相符。注意这个结论只适用于质点相对于 abc 系静止的情况，若有相对运动，则惯性力除了离心力，还会有一项科里奥利力^[244]。

若转轴取任意方向 $\boldsymbol{\omega}$ ，由式 8^[205] 得

$$\mathbf{a}_{xyz} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (4)$$

$$\mathbf{f} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (5)$$

科里奥利力

预备知识 离心力^[243]，平面旋转矩阵^[167]

科里奥利力 (**Coriolis Force**) 是匀速旋转的参考系中由质点运动产生的惯性力。

$$\mathbf{F}_c = 2m\mathbf{v}_{S'} \times \boldsymbol{\omega} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{v}_{S'}$ 是质点相对于旋转参考系 S' 的瞬时速度， $\boldsymbol{\omega}$ 是旋转系相对于某惯性系 S 转动的角速度矢量^[203]。式中的乘法是叉乘^[149]。在匀速转动参考系（属于非惯性系）中，若质点保持相对静止，则惯性力只有离心力。然而当质点与转动参考系有相对速度时，惯性力中还会增加一个与速度垂直的力，这就是科里奥利力。地理中的地转偏向力就是科里奥利力，可用上式计算（见“地球表面的科里奥利力^[??]”）。

由叉乘的定义可得，科里奥利力与速度矢量始终保持垂直，所以科里奥利力不会对质点做功。

推导

预备知识 连续叉乘的化简^[154], 圆周运动的速度^[203], 加速度的坐标变换^[215]

我们可以直接根据惯性力的定义(式 1^[240])和加速度的坐标变换(式 3^[215])得到任意非惯性系 S' 中质点的总惯性力 (S 为任意惯性系) 为

$$\mathbf{F}_c = m(\mathbf{a}_{S'} - \mathbf{a}_S) = -m\mathbf{a}_r + 2m\mathbf{v}_{S'} \times \boldsymbol{\omega} \quad (2)$$

其中第一项包含平移惯性力和转动惯性力, 转动惯性力又可划分为离心力以及角加速度产生的惯性力(见式 8), 但与质点相对 S' 的速度无关, 所以只将科里奥利力定义为第二项.

另一种推导

类比式 1^[213], 若 S' 系与 S 系原点始终重合, 且相对 S 系以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转, 对任意一个随时间变化的矢量(假设一阶导数存在), 我们把它在 S 和 S' 系中的时间导数分别记为 $(\dot{\mathbf{A}})_S$ 和 $(\dot{\mathbf{A}})_{S'}$, 则有

$$(\dot{\mathbf{A}})_S = (\dot{\mathbf{A}})_{S'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (3)$$

最有一项参考式 5^[203]. 注意该式中的矢量为几何矢量^[133]而不是列矢量, 若要将该式记为坐标形式, 应该使用同一坐标系^[213].

我们先将 \mathbf{A} 替换为质点的位矢 \mathbf{r} , 得参考系中质点的速度关系为(即式 1^[213])

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_{S'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (4)$$

两边在 S 系中对时间求导得

$$\mathbf{a}_S = (\dot{\mathbf{v}}_{S'})_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_S + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \quad (5)$$

注意 S' 系中的加速度 $\mathbf{a}_{S'}$ 并不是 $(\dot{\mathbf{v}}_{S'})_S$, 而是 $(\dot{\mathbf{v}}_{S'})_{S'}$. 令式 3 中的 $\mathbf{A} = \mathbf{v}_{S'}$, 得

$$(\dot{\mathbf{v}}_{S'})_S = \mathbf{a}_{S'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{S'} \quad (6)$$

将式 4 和式 6 代入式 5, 得

$$\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_{S'} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{S'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \quad (7)$$

所以旋转参考系中的总惯性力 (式 1 [240]) 为

$$\mathbf{f} = m(\mathbf{a}_{S'} - \mathbf{a}_S) = 2m\mathbf{v}_{S'} \times \boldsymbol{\omega} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \quad (8)$$

其中第一项被称为科里奥利力 (唯一一项与 $\mathbf{v}_{S'}$ 有关的), 第二项为离心力 (式 5 [243]), 第三项为角加速度产生的惯性力.

旋转参考系的“机械能守恒”

预备知识 科里奥利力[244], 机械能守恒 (单个质点) [230]

在匀速旋转参考系中, 如果加入惯性力的修正, 则牛顿定律同样适用. 那么我们是否同样有某种“修正版”的单质点机械能守恒呢? 答案是肯定的, 在旋转参考系中, 我们仍然定义每个质点的动能为 $E_k = mv^2/2$ (v 是相对旋转参考系的速度), 假设质点所受的所有非惯性力在旋转参考系中都是保守力[226], 对应的势能函数 $V(\mathbf{r})$. 那么机械能修正后的守恒量为

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(\mathbf{r}) - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \text{const} \quad (1)$$

其中 ω 是旋转参考系相对于惯性系的角速度.

对于质点系, 如果质点两两之间的力也是保守力, 例如库仑力或者万有引力, 那么我们只需要对每个质点计算上式并求和即可得到系统的守恒量.

例子: 雅可比常量[?].

推导

证明的思路很简单, 在“机械能守恒 (单个质点) [230]”中证明的基础上, 我们只需要额外考虑惯性力的做功即可.

由于科里奥利力始终与每个质点的运动方向垂直, 所以对质点不做功, 而离心力却有可能做功, 所以式 1 中的前两项不是守恒量. 每个质点所受的离心力只与位置有关, 于是我们可以得到一个离心力场

$$F_c(\mathbf{r}) = m\omega^2 \mathbf{r} \quad (2)$$

这是一个中心力场，所以必定是一个保守场^[2]，沿径向积分容易得到对应的等效势能函数为

$$V_c(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (3)$$

现在，离心力做功等于 $V_c(\mathbf{r})$ 的减小，所以把这个等效势能加入原来的机械能，就又得到了一个守恒量。

第三章

质点系与刚体

自由度

预备知识 柱坐标系^[38]，球坐标系^[39]

我们已知描述一个质点在三维空间中的位置需要至少三个变量，无论使用直角坐标，柱坐标或球坐标。我们说这个质点有三个**自由度 (degrees of freedom)**。同理，若空间中有 N 个质点可以自由移动，我们就说这些质点组成的系统有 $3N$ 个自由度。

需要注意的是，以上讨论的粒子都是自由的，即没有**约束**。若给系统施加约束，自由度就会相应减少。例如，若用长度为 R 的细棒将一个质点和坐标原点相连，则质点只能够在半径为 R 的球面上运动，这时我们在直角坐标系中施加了约束条件

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (1)$$

当我们确定了 x, y, z 中的任意两个变量后，第三个变量就可以根据上式确定，所以这时质点就只有两个自由度。我们把选取的两个自由坐标叫做**独立 (independent) 变量**，剩下的一个坐标就是**非独立的**¹。另一种更直观的方法是把这个质点的位置用球坐标 (r, θ, ϕ) 表示，约束条件变为

$$r = R \quad (2)$$

我们马上就得到两个独立的变量 (θ, ϕ) 用于完全确定质点的位置。我们把**式 1** 或**式 2** 这样的等式称为一个约束条件，若给自由度为 N 的系统加上 M 个约束条件，则系统的自由度减少为 $N - M$ 。

另一个例子是考虑两个质点，它们之间由长度为 R 细棒相连，那么原来的 6 个自由度的系统在一个约束条件 $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = R^2$ 下变为 5 个自由度。要具体选取五个独立变量，我们可以用三个独立变量先确定第一个质点的位置，然后再用剩下两个独立变量加上约束条件确定第二个质点的位置。我们还可以再继续加约束条件，例如限制第一个质点只能在 z 轴上运动，这事实上是两个约束条件 $x_1 = 0$ 和 $y_1 = 0$ ，使两个质点的自由度最终减少为 3 个。我们可以取一个独立变量描述第一个质点在 z 轴上的坐标，另外两个独立变量描述第二个质点相对于第一个质点的方向。

¹注意这个例子中第三个变量可能会有正负两个解，但我们仍然认为它是非独立的。

质点系

预备知识 牛顿第三定律^[220]

在考虑多个物体构成的系统时，我们有时候可以把每个物体都近似为一个质点，这样我们就得到了由有限个质点构成的系统，称为质点系。

令质点系中有 N 个质点，每个质点的受力都可以分为两类，一是系统外界物体给该质点的力，称为外力，二是来自系统内其他质点的力，称为内力。对第 i 个质点，将外力和内力分别记为 \mathbf{F}_i^{out} 和 \mathbf{F}_i^{in} 。

系统中所有质点所受的合力等于合内力加合外力

$$\mathbf{F}_{tot} = \mathbf{F}_{tot}^{in} + \mathbf{F}_{tot}^{out} = \sum_i^N \mathbf{F}_i^{in} + \sum_i^N \mathbf{F}_i^{out} \quad (1)$$

若将第 j 个质点对第 i 个质点的内力记为 $\mathbf{F}_{j \rightarrow i}$ 则上式中

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{in} = \sum_{i,j}^{i \neq j} \mathbf{F}_{j \rightarrow i} \quad (2)$$

任意两个质点 k 和 l 对该求和的贡献是一对相互作用力 $\mathbf{F}_{k \rightarrow l} + \mathbf{F}_{l \rightarrow k}$ ，而根据牛顿第三定律，相互作用力之和为零。所以上式求和为零。所以，质点系中合内力为零，系统所受合力等于合外力

$$\mathbf{F}_{tot} = \mathbf{F}_{tot}^{out} = \sum_i^N \mathbf{F}_i^{out} \quad (3)$$

质心 质心系

预备知识 体积分^[?]，质点系^[250]

质心的定义

质心通俗来讲可以理解为质量的中心，是系统中各个质点的位置矢量^[198]关于质量的加权平均值。我们先看几个例子。

两个等质量质点的质心

对于两个质量相等的质点，它们的质心显然在它们连线的中点处，无论它们的质量是多少。如果它们都在 x 轴上，则质心的位置就是两质点 x 坐标的中点

$$x_c = (x_1 + x_2)/2 \quad (1)$$

其中角标 c 表示 center of mass，有时候也会写做 CM.

在二维和三维空间的情况下，质点的位置用位置矢量 \mathbf{r} 描述，将它们的位置矢量分别记为 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 ，则质心的位置为

$$\mathbf{r}_c = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2 \quad (2)$$

即两个位置矢量的平均值。

两个不同质量质点的质心

当两个质点质量不一样时（分别记为 m_1 和 m_2 ），质心会更靠近更重的质点。如果它们都在 x 轴上，我们就用加权平均值

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

注意 $m_1 = m_2$ 就得到了式 1。另一个极端是当一个质量远大于另一个，如 $m_1 \gg m_2$ ，这时质心就趋近于 x_1 了。

二维和三维空间的情况下也类似有

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

当 $m_1 = m_2$ 就得到式 2。

习题 1

证明两质点的质心必定在其连线上，即 $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c$ 和 $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c$ 共线。

习题 2

试证明式 4 中质心到两质点的距离与它们的质量成反比，即

$$\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c|}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c|} = \frac{m_2}{m_1} \quad (5)$$

质点系的质心

若质点系中有 N 个质点, 令第 i 个质点质量为 m_i , 位置为 \mathbf{r}_i , 总质量为 $M = \sum_i m_i$, 则该质点系的质心定义为

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \quad (6)$$

在直角坐标系中, 我们可以将上式的矢量求和分解为对 x, y, z 方向的分量分别求和 (因为矢量相加等于两个分量分别相加). 令 $\mathbf{r}_i = x_i \hat{\mathbf{x}} + y_i \hat{\mathbf{y}} + z_i \hat{\mathbf{z}}$, 即矢量 \mathbf{r}_i 的坐标为 (x_i, y_i, z_i) , 有

$$x_c = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i \quad y_c = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i \quad z_c = \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i \quad (7)$$

例 1

空间直角坐标系中四个质点质量分别为 1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg, 坐标分别为 $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$ (单位: 米). 求该系统质心的位置.

解: 系统总质量为 10 kg, 直接使用式 7 得

$$x_c = \frac{1}{10 \text{ kg}} (0 \text{ m} \times 1 \text{ kg} + 1 \text{ m} \times 2 \text{ kg} + 0 \text{ m} \times 3 \text{ kg} + 0 \text{ m} \times 4 \text{ kg}) = \frac{1}{5} \text{ m} \quad (8)$$

$$y_c = \frac{1}{10 \text{ kg}} (0 \text{ m} \times 1 \text{ kg} + 0 \text{ m} \times 2 \text{ kg} + 2 \text{ m} \times 3 \text{ kg} + 0 \text{ m} \times 4 \text{ kg}) = \frac{3}{5} \text{ m} \quad (9)$$

$$z_c = \frac{1}{10 \text{ kg}} (0 \text{ m} \times 1 \text{ kg} + 0 \text{ m} \times 2 \text{ kg} + 0 \text{ m} \times 3 \text{ kg} + 3 \text{ m} \times 4 \text{ kg}) = \frac{6}{5} \text{ m} \quad (10)$$

所以质心的坐标为 $(1/5, 3/5, 6/5)$ (单位: 米).

质心的分解

若我们把质点系划分为若干组, 可以先计算每组的质心, 再计算“质心的质心”就可以得到系统的总质心. 我们举例说明

例 2

令四个质点中的前两个为 a 组, 后两个为 b 组, 则它们的质心分别为

$$\mathbf{r}_a = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) / M_a \quad \mathbf{r}_b = (m_3 \mathbf{r}_3 + m_4 \mathbf{r}_4) / M_b \quad (11)$$

其中 $M_a = m_1 + m_2$, $M_b = m_3 + m_4$. 再计算“质心的质心”得整个系统的质心为

$$\mathbf{r}_c = \frac{M_a \mathbf{r}_a + M_b \mathbf{r}_b}{M_a + M_b} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 + m_4 \mathbf{r}_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \quad (12)$$

这个结果符合式 6.

质心与重心

质心在物理中有什么用呢？一个基本的的应用就是质心就是物体的**重心**. 我们只讨论恒定重力场中物体的重心. 其定义是：若重力场对物体关于某点的合力矩^[265]恒为 0, 这个点就是它的**重心**. “合力矩为零”意味着，如果物体初始时以任意姿态静止，那么它将一直保持静止. 虽然我们还没系统学习力矩，但可以用初中学过的“力乘力臂”进行计算（式 1^[265]）.

例 3

轻杆²两端有质量分别为 m_1 和 m_2 的小球，轻杆可以绕系统质心在竖直平面上自由转动. 试证明重力对系统的力矩恒为 0.

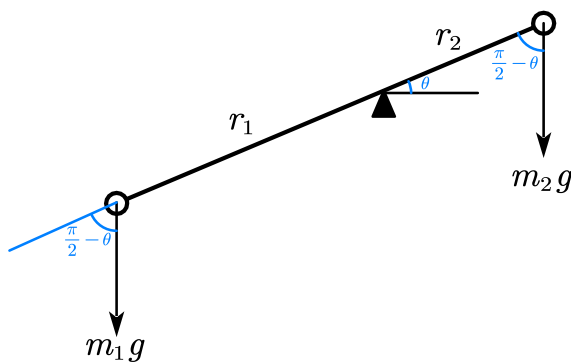


图 1: 轻杆与两小球

解：以逆时针为正，合力矩为

$$M = r_1 m_1 g \cos \theta - r_2 m_2 g \cos \theta = (r_1 m_1 - r_2 m_2) g \cos \theta \quad (13)$$

由式 5, 括号中两项相等，所以无论 θ 去何值，合力矩都为 0.

我们把一般性的证明留到“重心^[??]”中.

²轻杆是指质量可忽略不计的杆

连续质量分布

对连续质量分布，令密度关于位置的函数为 $\rho(\mathbf{r})$ ，总质量为密度的体积分

$$M = \int \rho(\mathbf{r}) dV \quad (14)$$

要计算质心，我们可以把整个物体划分为许多小块（微元），如果每一块都很小，我们可以假设第 i 块的位置为 \mathbf{r}_i ，密度为常数 $\rho(\mathbf{r}_i)$ ，体积为 ΔV_i ，所以质量为 $\Delta m_i = \rho(\mathbf{r}_i)\Delta V_i$ 。我们把每个小块都用 \mathbf{r}_i 处的一个质量为 Δm_i 的质点来代替，那么质心为

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{M} \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i = \frac{1}{M} \sum_i \mathbf{r}_i \rho(\mathbf{r}_i) \Delta V_i \quad (15)$$

当所有的微元的体积都趋近于零时，我们就可以将该式用体积分^[22] 表示为

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV \quad (16)$$

这个积分中的被积函数是矢量，结果也是矢量，该如何计算呢？答案就是像式 7 那样分别对矢量的每个分量积分，得到结果的每个分量（可见求和具有的性质，积分通常也有）。

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{M} \iiint x \sigma(\mathbf{r}) dx dy dz \\ y_c = \frac{1}{M} \iiint y \sigma(\mathbf{r}) dx dy dz \\ z_c = \frac{1}{M} \iiint z \sigma(\mathbf{r}) dx dy dz \end{cases} \quad (17)$$

如果要计算的物体是一个厚度可以忽略不计的薄片，令 $\sigma(\mathbf{r})$ 为面密度（单位面积的质量），我们就可以用面积分代替体积分。

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) dS \quad (18)$$

即

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{M} \iint x \sigma(\mathbf{r}) dx dy \\ y_c = \frac{1}{M} \iint y \sigma(\mathbf{r}) dx dy \end{cases} \quad (19)$$

例 4 长方形的质心

在平面直角坐标系中, 长方形均匀薄片的 4 个点分别为 $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b) , $(b, 0)$, 面密度 σ 为常数, 试计算其质心.

解: 长方形的总质量为 $M = ab\sigma$. 使用式 18 (分别对矢量的两个分量积分) 得

$$x_c = \frac{1}{ab\sigma} \int_0^b \int_0^a x\sigma \, dx \, dy = \frac{1}{a} \int_0^a x \, dx = \frac{a}{2} \quad (20)$$

$$y_c = \frac{1}{ab\sigma} \int_0^b \int_0^a y\sigma \, dx \, dy = \frac{1}{b} \int_0^b y \, dy = \frac{b}{2} \quad (21)$$

可见质心的坐标为 $(a/2, b/2)$, 恰好在长方形的中心.

我们再补充两个例子用于练习积分的运算

例 5 三角形的质心

在平面直角坐标系中, 三角形均匀薄片的 3 个点分别为 $(-a, 0)$, $(b, 0)$, $(0, c)$. 试计算其质心.

解: 令面密度 σ 为常数, 则总质量为 $M = (a+b)c\sigma/2$. 两条斜边的直线方程分别为

$$x = f_1(y) = a(y-c)/c \quad x = f_2(y) = b(c-y)/c \quad (22)$$

做面积分得 (先积 x 再积 y)

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{2}{(a+b)c\sigma} \int_0^c \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} x\sigma \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{(a+b)c} \int_0^c [f_2^2(y) - f_1^2(y)] \, dy = \frac{b-a}{3} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{2}{(a+b)c\sigma} \int_0^c \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} y\sigma \, dx \, dy \\ &= \frac{2}{(a+b)c} \int_0^c [f_2(y) - f_1(y)]y \, dy = \frac{c}{3} \end{aligned} \quad (24)$$

不难发现, 这就是初中所学的三角形的重心, 即底边中线的三等分点, 或三条中线的交点.

由于质点系的积分和求和具有同样的性质, 在以下的证明中, 我们只需对质点系加以证明, 结论对于连续质量分布的物体也同样适用.

质心的唯一性

既然质心的定义取决于参考系（因为 \mathbf{r}_i 取决于参考系），那么不同参考系中计算出的质心是否是空间中的同一点呢？例如将例 4 中的长方形平移 Δs ，质心是否也会平移 Δs ？我们只需要证明，在 A 坐标系中得到的质心 \mathbf{r}_{Ac} 与 B 坐标系中得到的质心 \mathbf{r}_{Bc} 满足关系

$$\mathbf{r}_{Ac} = \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{Bc} \quad (25)$$

其中 \mathbf{r}_{AB} 是 A 系原点指向 B 系原点的矢量。首先根据定义

$$\mathbf{r}_{Ac} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_{Ai} \quad \mathbf{r}_{Bc} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_{Bi} \quad (26)$$

由位矢的坐标系变换， $\mathbf{r}_{Ai} = \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{Bi}$ ，所以

$$\mathbf{r}_{Ac} = \frac{1}{M} \sum_i m_i (\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{Bi}) = \mathbf{r}_{AB} + \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_{Bi} = \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{Bc} \quad (27)$$

质心参考系

定义质点系的**质心参考系**（或**质心系**）为原点固定在质心上且没有转动的参考系（平动参考系）。根据质心的唯一性（式 25），在质心系中计算质心（式 6）仍然落在原点，即

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_{ci} = \mathbf{0} \quad (28)$$

其中 \mathbf{r}_{ci} 是质心系中质点 i 的位矢。

注意质心系并不一定是惯性系，只有当合外力为零质心做匀速直线运动时，质心系才是惯性系。在非惯性系中，每个质点受惯性力。

未完成：来源？链接？

质心系中总动量

把式 28 两边对时间求导，得

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_{ci} = \mathbf{0} \quad (29)$$

注意到等式左边是质心系中质点系的总动量，所以我们得到质心系的一个重要特点，质心系中总动量为零。

质点系的动量

预备知识 动量 动量定理（单个质点）^[231]，质心质心系^[250]

质点系的总动量为

$$\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \quad (1)$$

由质心的定义（式 6^[250]）

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i = M \mathbf{r}_c \quad (2)$$

其中 \mathbf{r}_c 为质心的位置， $M = \sum_i m_i$ 为质点系的总质量。两边对时间求导并代入式 1 得

$$\mathbf{p} = M \mathbf{v}_c \quad (3)$$

其中 $\mathbf{v}_c = \dot{\mathbf{r}}_c$ 是质心的速度。

式 3 告诉我们一个简洁的结论：在求一个系统的总动量时，我们可以把它等效为其质心处的质点。

例 1 滚动的圆盘

一个质量为 M 圆盘在地面沿直线滚动，圆心的速度为 \mathbf{v} 。若将其分割为许多小份，使用 $\sum_i m_i \mathbf{v}_i$ （或者用积分形式）求总动量会比较麻烦。但如果直接用式 3，我们可以马上写出它的总动量为 $\mathbf{p} = M \mathbf{v}$ ，甚至不需要知道它的半径和角速度，也不需要知道它和地面是否存在打滑。

通过式 3 也可以直观地得出：质心参考系中系统的总动量为零。

刚体

预备知识 质心^[250]，自由度^[249]

当我们要考虑一个物体的质量分布带来的力学效应时，就不能再将其简化为一个质点。许多情况下我们考虑的物体在某过程中形变较小可忽略不计，这

时我们就可以忽略它运动过程中的的任何形变，从而大大简化问题。我们把这种模型叫做**刚体**。在分析刚体时，我们通常把刚体看做是质点系。要这么做，我们可以把刚体划分为无限多个体积无限小的微元，再把每个微元近似为一个质量相同的质点即可。

刚体的自由度

在没有任何约束的情况下，三维空间中每个质点有 3 个**自由度**，即用三个完全独立的变量才能完全确定位置，所以 N 个质点组成的质点系共有 $3N$ 个自由度。然而完全确定一个刚体的位置只需要 6 个变量，这是因为刚体模型通过假设“任意两个质点之间距离不变”，给质点系的位置施加了 $3N - 6$ 个约束条件。如何得出 6 个自由度呢？我们可以假设第一个质点有 3 个自由度，第二个质点由于要与第一个质点保持距离不变，只有 $3 - 1 = 2$ 个自由度，而第三个质点要与前两个质点保持距离不变，只有 $3 - 2 = 1$ 个自由度。有了前三个质点后（假设它们不共线），剩下所有质点的位置都可以由与这三个质点的距离确定，所以任何刚体都有 $3 + 2 + 1 = 6$ 个自由度。

我们也可以这么划分 6 个自由度：令其中 3 个决定刚体上某点的位置，2 个决定该点到刚体上另一点的矢量的方向（球坐标^[39]中的两个角度），最后一个决定刚体绕该矢量旋转的角度。

若刚体只能绕固定点旋转，那么刚体就只有 3 个转动自由度。若在此基础上，刚体只能绕固定轴旋转，那它就只剩一个自由度了（转过的角度）。

刚体的运动

如果已知刚体的受力（可以关于时间变化），如何计算刚体的运动呢？我们可以分别计算刚体所受的所有外力的矢量和，称为**合外力**，以及所有外力关于刚体质心^[250]的矢量和，称为**合外力矩**。然后通过质点系的动量定理^[262]，角动量定理^[271]以及刚体的转动惯量^[278]或者惯性张量^[288]就可以得到刚体在每个时刻的姿态。

如果刚体在旋转过程中转轴始终保持在同一个方向，那么计算过程将十分简单，因为不需要使用惯性张量，具体过程见“刚体的平面运动方程^[285]”。但如果刚体转动时转轴可能发生改变，那么就必须使用惯性张量和参考系变换，使计算更为复杂，详见“刚体的运动方程^[294]”。

轻杆模型

预备知识 速度 加速度^[202]

轻杆在这里指的是质量可以忽略不计，且不能伸缩的刚性杆。轻杆和质点一样都是一种理想化的模型。我们先来讨论轻杆的运动学特性，而把动力学放到后面。

不可伸长条件

速度约束

我们来思考“不可伸长”这一条件会对杆两端的速度和加速度带来什么约束。令杆的长度为 L ，两端点的位置矢量分别为 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 ，则杆的长度平方为 $L^2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2$ 。另外记端点的速度为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 。

如果我们将 \mathbf{r}_1 指向 \mathbf{r}_2 的单位矢量记为 $\hat{\mathbf{r}}$

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}{L} \quad (1)$$

长度平方随时间的变化的率为³

$$\frac{d}{dt}L^2 = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 \quad (2)$$

由矢量求导法则

$$\frac{d}{dt}L^2 = 2L \frac{dL}{dt} = 2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = 2L(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (3)$$

即

$$\frac{dL}{dt} = \mathbf{v}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (4)$$

所以要满足长度恒定不变，只需要满足（充分必要条件）

$$\mathbf{v}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (5)$$

该式的意思是，两个端点的速度沿杆的分量在任意时刻都相等。

³为什么我们要用长度的平方而不是直接对 $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ 求导？我们的确可以这么做并得到同样的结果，但是使用平方会使计算更方便。

例 1

如图 3, 杆的两端被固定在两个垂直的轨道上运动, 两端的运动速度分别为 v_1, v_2 , 已知杆与水平轨道的夹角为 θ , 求 v_1 和 v_2 的关系. 解: 由式 5, 两

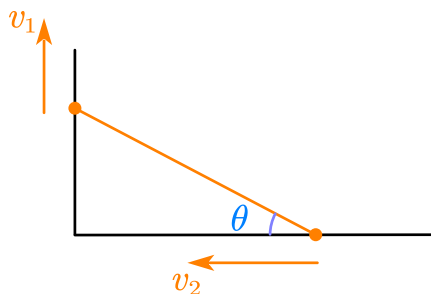


图 1: 杆的运动

速度在杆方向的分量应该相等, 即

$$v_2 \cos \theta = v_1 \sin \theta \quad (6)$$

即

$$v_2 = v_1 \tan \theta \quad (7)$$

例 2 人拉船模型

如图 2, 人在岸上通过一小滑轮用绳子以速度 v 拉船, 绳子与水平面的夹角为 θ , 求船的速度 u .

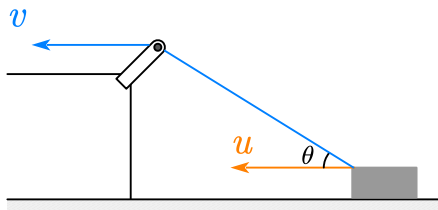


图 2: 人拉船模型

解: 我们可以把从滑轮到船的这段绳子的长度缩短的速度用式 4 来计算, 这个速度也就是人的速度

$$v = -\frac{dL}{dt} = u \cos \theta \quad (8)$$

所以

$$u = \frac{v}{\cos \theta} \quad (9)$$

习题 1

三个小朋友 ACB 两两相距 30 m, 接下来的任意时刻 A 向着 B 跑, B 向着 C 跑, C 向着 A 跑, 速度都相等. 求他们相遇时, 各跑了多少路程.

角速度

预备知识 圆周运动的加速度^[205]

若已知两端点的速度, 如何求出角速度呢? 我们可以在以 \mathbf{r}_1 为原点的无转动的参考系中观察, 此时轻杆另一端的速度为 $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ 且与 $\hat{\mathbf{r}}$ 垂直, 所以角速度大小为

$$\omega = \frac{|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|}{r} \quad (10)$$

矢量表达式为

$$\boldsymbol{\omega} = \hat{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{r} \quad (11)$$

加速度约束

若我们想知道对加速度的约束, 只需对式 3 两边再求一次时间导数, 即式 2 的二阶时间导数.

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) = 0 \quad (12)$$

用式 10 把 $(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2$ 用 ω 表示, 再两边除以 r 得

$$\mathbf{a}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{a}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}} = \omega^2 r \quad (13)$$

ω 是杆的瞬时角速度的大小.

例 3

在例 1 的模型中, 若已知端点的速度 v_1, v_2 和 θ , 求两点加速度 a_1, a_2 的关系.

解: 由式 11 和式 13 得,

$$\omega = (v_2 \cos \theta + v_1 \sin \theta)/r \quad (14)$$

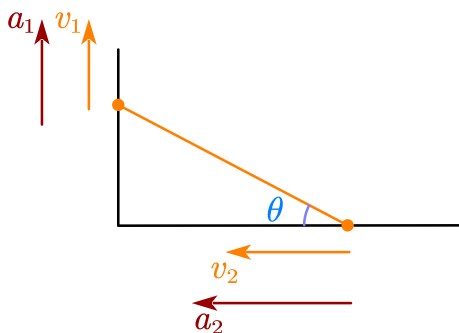


图 3: 杆的运动

$$a_2 \cos \theta - a_1 \sin \theta = \omega^2 r = (v_2 \cos \theta + v_1 \sin \theta)^2 / r \quad (15)$$

动力学

预备知识 转动惯量^[278]

轻杆没有质量，也没有转动惯量。假设我们只能在轻杆的两端对其施加两个力 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ ，这两个力会满足什么条件呢？首先，轻杆受到的合力必须为 $\mathbf{0}$ ，否则他就会马上被加速到无限快。这意味着这两个力大小相等，方向相反 ($\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$)。其次，它受到的和力矩必须也为 $\mathbf{0}$ ，否则就会瞬间拥有无限大的角速度。这意味着两个力必须共线，即都延杆的方向。于是我们可以令 $\mathbf{F}_1 = F\hat{\mathbf{r}}$, $\mathbf{F}_2 = -F\hat{\mathbf{r}}$ 。

现在，无论轻杆如何运动，这两个力对轻杆做功的功率为

$$P = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = F(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_2) \quad (16)$$

由式 5 可知功率恒为 0。

动量定理 动量守恒

预备知识 质点系的动量^[257]

以下我们将根据牛顿定律推导出系统的动量定理，即系统总动量的变化率等于合外力

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}^{out} \quad (1)$$

由此可以得出系统所受合外力为零时系统总动量不随时间变化, 即**动量守恒 (conservation of momentum)**。

由式 3 [257], 还可以把式 1 改写为类似牛顿第二定律的形式, 一些教材中被称为**质点系的牛顿第二定律**

$$M\mathbf{a}_c = \mathbf{F}^{out} \quad (2)$$

其中 \mathbf{a}_c 是质点系质心的加速度. 系统合外力为零时, 质心加速度为零, 即静止或者做匀速运动.

推导

在牛顿力学中任何系统都可以看做质点系, 质点系中第 i 个质点可能受到系统内力 \mathbf{F}_i^{in} 或系统外力 \mathbf{F}_i^{out} . 由单个质点的动量定理[231],

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}_i = \mathbf{F}_i^{in} + \mathbf{F}_i^{out} \quad (3)$$

总动量的变化率为

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\mathbf{P}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{in} + \sum_i \mathbf{F}_i^{out} \quad (4)$$

由“质点系[250]”中的结论, 上式右边第一项求和是系统合内力, 恒为零. 于是我们得到系统的动量定理

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i^{out} \quad (5)$$

可见当和外力 (即等式右边) 为零时, 动量 \mathbf{P} 不随时间变化, 也就是**动量守恒**.

未完成: 导弹爆炸, 人船模型

例 1 静止原子核的转变

一个原来静止的原子核, 经放射性衰变, 放出一个动量为 $9.22 \times 10^{-16} \text{g} \cdot \text{cm/s}$ 的电子, 同时该核在垂直方向上又放出一个动量为 $5.33 \times 10^{-16} \text{g} \cdot \text{cm/s}$ 的中微子. 问蜕变后原子核的动量的大小和方向.

解：由于这个静止的原子核在蜕变的全过程中没有受到其他外力，所以对
该原子核构成的系统，总动量守恒。即有

$$\mathbf{p}_B + \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_\nu = 0 \quad (6)$$

即有

$$p_B = |\mathbf{p}_B| = |-\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_\nu| = \sqrt{p_e^2 + p_\nu^2} = 10.65 \times 10^{-16} \text{ g} \cdot \text{cm/s} \quad (7)$$

$$\theta = \arctan \frac{5.33}{9.22} = 30^\circ \quad (8)$$

质点系的动能 柯尼希定理

预备知识 质点系的动量^[257]

柯尼希定理

某参考系中质点系的动能等于该参考系中其质心的动能加上质心系中质点系的动能，即

$$E_k = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ci}^2 \quad (1)$$

其中 M 是所有质点的质量和， v_c 是质心系相对于当前参考系的运动速度， m_i 是第 i 个质点的质量， v_{ci} 是第 i 个质点在质心系中的速度。

例 1 圆环滚动的动能

一个圆环在水平地面上沿直线无摩擦地滚动，其半径为 R ，质量为 m ，角速度为 ω ，求地面参考系中圆环的动能。

圆环质心的速度大小为 $v_c = \omega R$ ，圆环相对于圆心旋转的线速度大小处处为 $v_{ci} = \omega R$ ，代入式 1 得动能为

$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ci}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 R^2 = m \omega^2 R^2 \quad (2)$$

证明

在当前参考系中，第 i 个质点的运动速度为

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{ci} \quad (3)$$

于是有

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{ci})^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_{ci}^2 + \sum_i m_i \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}_{ci} \end{aligned} \quad (4)$$

现在只需证明 $\sum_i m_i \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}_{ci} = 0$ 即可。考虑到

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}_{ci} = \mathbf{v}_c \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_{ci} \quad (5)$$

而质心系中的质点系动量为零（式 29^[250]），所以

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_{ci} = \mathbf{0} \quad (6)$$

证毕。

力矩

预备知识 矢量的叉乘^[149]

平面力矩

如果只考虑一个厚度不计的片状物体在平面上的运动和受力，受力点位矢为 \mathbf{r} ，力为 \mathbf{F} ，那么对于一个给定的参考点（除非明确指出，一般取坐标原点），就可以计算物体的受到的力矩。

根据初中所学的方法，应该先作出“力臂” \mathbf{r}_\perp 与力的方向垂直（图 1 左）。力矩的大小（用 τ 表示）为

$$\tau = |\mathbf{r}_\perp| |\mathbf{F}| = |\mathbf{r}| |\mathbf{F}| \sin \theta \quad (1)$$

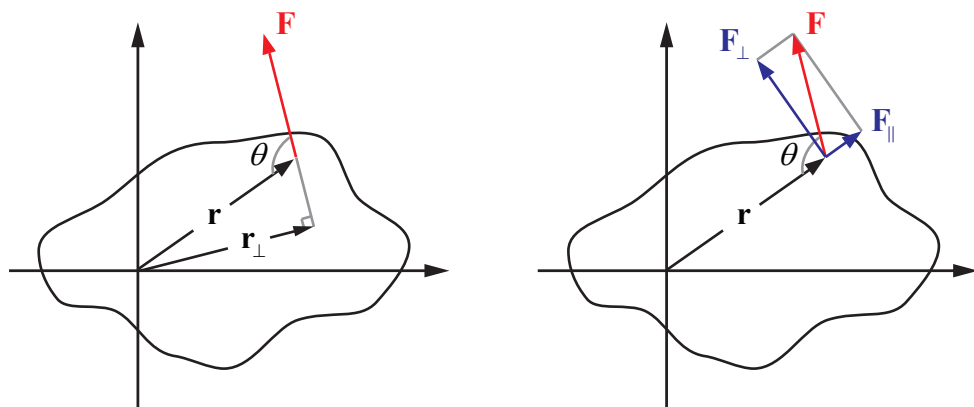


图 1: 力矩的两种几何理解

其中 θ 是 \mathbf{r} 与 \mathbf{F} 的夹角或其补角⁴. 从另一种角度来看, 也可以把力 \mathbf{F} 正交分解为平行于 \mathbf{r} 的分量和垂直于 \mathbf{r} 的分量 (图 1 右). 其中平行分量不产生力矩, 垂直分量产生的力矩为

$$\tau = |\mathbf{r}||\mathbf{F}_\perp| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\theta \quad (2)$$

为了区分力矩的两个不同的方向 (逆时针和顺时针), 通常有两种做法: 一是用正负号加以区分, 例如规定逆时针的力矩为正, 顺时针为负. 这种定义把力矩看做一种标量 (就像我们讨论一维运动时, 将速度表示成标量, 用正负号区分方向).

空间力矩

若物体受到若干个力, 且受力点不在一个平面内, 或者力方向不在同一平面内, 则应该在三维空间内考虑力矩, 这时力矩只能是矢量, 使用位置矢量和力矢量的叉乘^[149] 定义为

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3)$$

根据这种定义, 单个力的力矩大小还是 $\tau = |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\theta$, 但是得到的力矩是矢量. 在平面问题中, 逆时针的力矩垂直纸面指向读者, 而顺时针的力矩方向相反.

力矩的叠加

⁴因为 $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

预备知识 质心^[250]，重积分^[??]

若一个物体在多个位置 \mathbf{r}_i 分别受力为 \mathbf{F}_i ($i = 1, \dots, N$)⁵，那么定义总力矩为每个点的力矩之和

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad (4)$$

如果受力是连续分部的，假设受力的体密度为 $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ ，那么可以由体积分计算总力矩

$$\boldsymbol{\tau} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{f}(\mathbf{r}) dV \quad (5)$$

这个积分可以展开为三个分量的体积分。

习题 1 重力的力矩

若一个物体处于匀强重力场中，若它的密度分布为 $\rho(\mathbf{r})$ 求它受重力的力矩。

事实上这个问题与其用式 5，还有一种更简单的办法：假设这个物体由许多质点组成，每个质点位置为 \mathbf{r}_i ，质量为 m_i ，令重力加速度矢量为 \mathbf{g} （这是一个常矢量，指向下），则总力矩为

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{g}) = \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g} \quad (6)$$

这里使用了叉乘的分配律。再使用质心的定义，令总质量为 $M = \sum_i m_i$ ，得

$$\boldsymbol{\tau} = M \mathbf{r}_c \times \mathbf{g} \quad (7)$$

可见在计算匀强重力场对物体得力矩时，我们可以假设所有的重力都集中与质心一点。

力矩的坐标系变换

一般来说，由于受力点的位置矢量 \mathbf{r} 与坐标系的选取有关，现在来看力矩在不同坐标系之间的变换。

⁵如果某个点处受到多个力，我们可以计算该点受到的合力记为 F_i

在坐标系 A 中, 第 i 个受力点的位置矢量为 \mathbf{r}_{Ai} , 物体的合力矩为

$$\boldsymbol{\tau}_A = \sum_i \mathbf{r}_{Ai} \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (8)$$

在另一坐标系 B 中, B 原点指向 A 原点的矢量为 \mathbf{r}_{BA} , 合力矩为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_B &= \sum_i (\mathbf{r}_{Ai} + \mathbf{r}_{BA}) \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_{Ai} \times \mathbf{F}_i + \sum_i \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}_i \\ &= \boldsymbol{\tau}_A + \mathbf{r}_{BA} \times \sum_i \mathbf{F}_i \end{aligned} \quad (9)$$

其中最后两步使用了叉乘的分配律^[149]. 由结论可以看出, 变换坐标系, 力矩需要加上原坐标系相对新坐标系的位移叉乘物体的合力. 由此也可以得出, 若物体的合力为零, 则力矩与参考系无关.

刚体的静力平衡

预备知识 动量定理^[262], 角动量定理^[271]

结论

在任意参考系中, 若刚体所受的合外力, 合外力矩都为零, 则刚体质心不动或匀速运动, 且刚体没有转动或绕质心做匀速转动.

推导

把刚体看做由许多质点组成, 合外力为零时刚体动量守恒, 而动量等于质心的动量^[257] $\mathbf{p}_c = M_c \mathbf{v}_c$, 所以质心做匀速运动或不动.

刚体合外力矩为零时, 质点系角动量守恒^[271], 而角动量等于质心的角动量 $\mathbf{L}_c = \mathbf{r}_c \times \mathbf{p}_c$ 加质心系中的角动量 (式 4^[269]). 当质心匀速运动或不动时质心的角动量不变, 所以质心系中刚体的角动量也不变, 所以刚体绕质心做匀速转动或不转动.

例 1

如图 1, 一个质量为 m 的线轴被斜挂在墙上, 线轴与墙面的摩擦系数为 μ ,

线轴的大圆半径为 R ，小圆半径为 r ，求当 α 满足什么条件时，线轴才能不落。

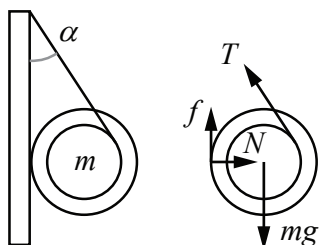


图 1: 线轴的平衡

我们先来看线轴受哪几个力：重力 mg ，绳的拉力 T ，墙的支持力 N 和摩擦力 f 。由摩擦系数的定义和刚体平衡条件可得

$$\begin{cases} f \leq \mu N & (\text{摩擦系数}) \\ N - T \sin \alpha = 0 & (\text{水平方向受力平衡}) \\ T \cos \alpha + f - mg = 0 & (\text{竖直方向受力平衡}) \\ Tr - fR = 0 & (\text{力矩平衡}) \end{cases} \quad (1)$$

其中最后一条力矩平衡是以圆心为原点计算力矩，虽然原则上我们可以取任意点计算力矩，但取在圆心计算最为简单。除了 α 我们三个未知数 T, f, N ，用以上三条等式恰好可以把这三个未知数消去，可得关于 α 的不等式

$$\sin \alpha \geq \frac{r}{\mu R} \quad (2)$$

一个有趣的地方在于，不等式中没有出现质量 m 。事实上，我们不使用那条含有 mg 的等式也可以顺利得到答案。

角动量

预备知识 质点的角动量^[232]

系统的角动量

角动量是矢量，若把系统看做质点系，则系统的角动量等于所有质点的角动量矢量叠加.

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \quad (1)$$

角动量的坐标系变换

可类比力矩的坐标系变换 (式 9)，坐标系 A 中总角动量为

$$\mathbf{L}_A = \sum_i \mathbf{r}_{Ai} \times \mathbf{p}_i \quad (2)$$

变换到坐标系 B 中，总角动量为

$$\mathbf{L}_B = \sum_i (\mathbf{r}_{BA} + \mathbf{r}_{Ai}) \times \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_{BA} \times \sum_i \mathbf{p}_i + \mathbf{L}_A \quad (3)$$

角动量的分解

质心系中的角动量为

$$\mathbf{L}_0 = \sum_i \mathbf{r}_{ci} \times \mathbf{p}_i \quad (4)$$

定义质心角动量为“质心处具有系统总质量 M 的质点的角动量”(类比质心动量的定义, 式 3^[257])

$$\mathbf{L}_c = \mathbf{r}_c \times (M\mathbf{v}_c) = \mathbf{r}_c \times \mathbf{p}_c \quad (5)$$

现在我们变换到任意坐标系中，令总角动量为 \mathbf{L} ，由式 3 得

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_c \times \sum_i \mathbf{p}_i + \mathbf{L}_0 \quad (6)$$

由于系统总动量 $\sum_i \mathbf{p}_i$ 等于质心动量 \mathbf{p}_c ，右边第一项等于质心角动量式 5。最后得到

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_c + \mathbf{L}_0 \quad (7)$$

所以任何坐标系中，系统的总角动量等于其质心的角动量加上相其相对质心的角动量.

角动量定理 角动量守恒

预备知识 角动量定理 角动量守恒（单个质点）^[232]

角动量定理可以表示为

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \quad (1)$$

即系统的角动量对时间的变化率等于所受外力的合力矩。系统可以包括任意选定的若干物体。

推导

推导可类比动量定理^[262]。我们已经知道单个质点的角动量，而任何物体都可以划分成若干足够小的微元，每个微元可以看成是一个质点。令第 i 个质点的位矢为 \mathbf{r}_i ，角动量为 \mathbf{L}_i ，力矩为 $\boldsymbol{\tau}_i$ ，单个质点的角动量定理^[232] 为

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau}_i^{in} + \boldsymbol{\tau}_i^{out} \quad (2)$$

其中 $\boldsymbol{\tau}_i^{in}$ 和 $\boldsymbol{\tau}_i^{out}$ 为质点 i 受到的系统内其他质点的力矩和来自系统外的力矩。将该式对所有 i 求和，得到总角动量 \mathbf{L} 变化率

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i^{in} + \sum_i \boldsymbol{\tau}_i^{out} \quad (3)$$

现在我们只需证明质点系的合内力矩为零即可

$$\sum_i \boldsymbol{\tau}_i^{in} = \sum_i \left(\mathbf{r}_i \times \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{j \rightarrow i} \right) = \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{j \rightarrow i} \quad (4)$$

其中 $\mathbf{F}_{j \rightarrow i}$ 是质点 j 对质点 i 的力。现在只考虑任意两个质点 k 和 l ，在求和中的贡献为

$$\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{l \rightarrow k} + \mathbf{r}_l \times \mathbf{F}_{k \rightarrow l} \equiv \boldsymbol{\tau}_{l \rightarrow k} + \boldsymbol{\tau}_{k \rightarrow l} \quad (5)$$

即 k 对 l 的力矩加 l 对 k 的力矩（两质点的和内力矩）。所以若能证明任意两质点的和内力矩为零，则质点系的合内力矩为零。

我们先来看几何证明。如图 1，根据定义，力矩的大小等于力的模长乘以力臂的长度^[265]，而一对相互作用力的大小相同，又由于二者共线，力臂也重

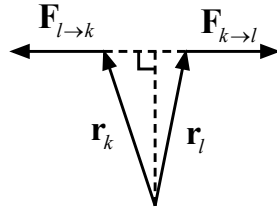


图 1: 两质点的相互作用力对总力矩贡献为零

合，所以两个力矩大小相等。但是两个力矩的方向一个是顺时针（指向纸内），一个是逆时针（指向纸外），所以两力矩互相抵消，相加为零。

再看代数方法：我们先沿着两质点的连线写出相互作用力 $\mathbf{F}_{l \rightarrow k} = \alpha(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l)$ ， $\mathbf{F}_{k \rightarrow l} = \alpha(\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k)$ ，直接计算两力矩和得

$$\mathbf{r}_k \times (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l)\alpha + \mathbf{r}_l \times (\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k)\alpha = 0 \quad (6)$$

证毕。

例 1 单车轮与转椅实验

小明开始时坐在静止的转椅上，两手握住一个单车轮的轴的两端，单车轮在水平面上转动。这时小明将单车轮上下翻转（仍保持转动），问小明与转椅会如何转动？

假设开始时车轮的角动量向上，那么翻转后车轮的角动量向下，即角动量增量向下。由于角动量守恒，小明的身体和转椅的角动量必须有一个向上的增量，所以转椅最后的旋转方向与轮子开始时的旋转方向相同。

例 2 陀螺的进动

如图 2（左），陀螺旋转时，若它的轴与竖直方向有一定倾角，轴会绕一个

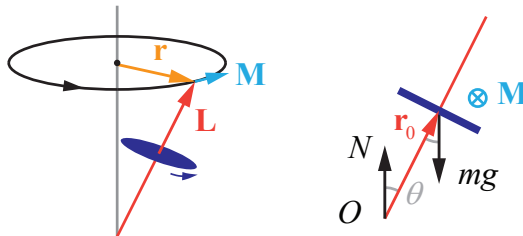


图 2: 陀螺的进动

竖直轴缓慢旋转，这种现象被称为进动。为了便于分析，我们先假设陀螺进动的角速度比陀螺自转的角速度要慢得多。这样，我们就可以认为陀螺的角动量

\mathbf{L} 与陀螺的轴平行. 显然, 陀螺的进动意味着陀螺的角动量变化率 $d\mathbf{L}/dt$ 的方向始终垂直于图中 \mathbf{r} 和 \mathbf{L} 所在的平面. 根据角动量定理, 陀螺所受的力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 也具有同样的大小和方向.

那么这个力矩是如何产生的呢? 我们对陀螺进行受力分析如图 2 (右), 要计算陀螺所受力矩, 我们取轴的底端为原点, 假设陀螺的轴没有质量, 则地面对陀螺的支持力 N 产生的力矩为零, 而重力产生的力矩为 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_0 \times (m\mathbf{g})$, 其大小为 $mgr_0 \sin\theta$, 方向垂直纸面向里, 恰好符合陀螺进动的要求.

比较违反直觉的地方在于, 陀螺受到的重力是延使陀螺倾倒的方向施加的, 然而陀螺不但丝毫不会倾倒 (如果不计摩擦), 反而其重心会向着与重力垂直的方向移动.

二体系统

预备知识 自由度^[249], 动量定理^[262]

我们现在考虑两个仅受相互作用的质点 A 和 B , 它们的质量分别为 m_A 和 m_B . 由于不受系统外力, 在任何惯性系中它们的质心^[250] 都会做匀速直线运动 (式 2^[262]). 所以系统的质心参考系是一个惯性系, 以下我们选取质心参考系, 系统的质心将一直处于原点.

现在定义它们的相对位矢 (也叫相对坐标) 为点 A 指向点 B 的矢量

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \quad (1)$$

且定义相对速度和相对加速度分别为 \mathbf{R} 的导数 $\dot{\mathbf{R}}$ 和二阶导数 $\ddot{\mathbf{R}}$. 在质心系中观察, 由于质心始终处于原点, 两质点的位矢 \mathbf{r}_A 和 \mathbf{r}_B 满足

$$m_A \mathbf{r}_A + m_B \mathbf{r}_B = \mathbf{0} \quad (2)$$

联立式 1 和式 2 可以发现在质心系中 $\mathbf{R}, \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ 间始终存在一一对应的关系 (共线且模长呈固定比例), 所以质心系中不受外力的二体系统只有三个自由度^[249]

$$\mathbf{r}_A = \frac{-m_B}{m_A + m_B} \mathbf{R} \quad \mathbf{r}_B = \frac{m_A}{m_A + m_B} \mathbf{R} \quad (3)$$

运动方程

现在令质点 A 对 B 的作用力为 \mathbf{F} (与 \mathbf{R} 同向), 则由牛顿第三定律, B 对 A 有反作用力 $-\mathbf{F}$. 两质点加速度分别为 (牛顿第二定律) $\mathbf{a}_A = -\mathbf{F}/m_A$, $\mathbf{a}_B = \mathbf{F}/m_B$. 所以相对加速度为

$$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{r}}_B - \ddot{\mathbf{r}}_A = \frac{m_A + m_B}{m_A m_B} \mathbf{F} \quad (4)$$

若定义两质点的约化质量为

$$\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \quad (5)$$

且将上式两边同乘约化质量, 我们得到相对位矢的牛顿第二定律

$$\mathbf{F} = \mu \ddot{\mathbf{R}} \quad (6)$$

也就是说, 在质心系中使用相对位矢, 二体系统的运动规律就相当于单个质量为 μ , 位矢为 \mathbf{R} 的质点的运动规律, 我们姑且将其称为**等效质点**. 而 A 对 B 的作用力可以看成等效质点的受力.

例 1 两天体圆周运动

令质量分别为 m_1 和 m_2 的天体距离为 R , 在万有引力作用下绕质心做圆周运动, 求角速度 ω .

解: 两天体之间的引力大小为 (?? [?])

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{R^2} \quad (7)$$

如果不使用等效质点的概念, 我们可以先用式 3 得到两个天体做圆周运动的半径, 然后再令引力等于其中一个天体的向心力^[221]

$$F = m_1 \omega^2 r_1 \quad (8)$$

也可以不求 r_1, r_2 , 直接使用等效天体的圆周运动向心力

$$F = \mu \omega^2 R \quad (9)$$

易得以上两式是等效的, 解得

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}} \quad (10)$$

机械能

再来看系统的动能. 令 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}$, 使用式 3 把系统在质心系中的总动能用相对位矢表示得

$$E_k = \frac{1}{2}(m_A \dot{\mathbf{r}}_A^2 + m_B \dot{\mathbf{r}}_B^2) = \frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2 \quad (11)$$

这恰好是等效质点动能.

若两质点间的相互作用力的大小只是二者距离 $R = |\mathbf{R}|$ 的函数, 我们可以用一个标量函数 $F(R)$ 来表示力与距离的关系, 即

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = F(R) \hat{\mathbf{R}} \quad (12)$$

注意 $F(R) > 0$ 时两质点存在斥力, $F(R) < 0$ 时存在引力.

根据“势能^[226]”中的式 20, 我们可以定义势能函数 $V(R)$ 为 $F(R)$ 的一个负原函数. 现在写出二体系统在质心系中的机械能为

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{R}}^2 + V(R) \quad (13)$$

由于系统不受外力, 机械能守恒.

动量守恒

在质心系中, 两质点的总动量恒为零, 动量守恒. 令它们的动量分别为 \mathbf{p}_A 和 \mathbf{p}_B , 有

$$\mathbf{p}_B = m_B \dot{\mathbf{r}}_B = \mu \mathbf{v} \quad (14)$$

令等效质点的动量为 $\mathbf{p} = \mu \mathbf{v}$, 则

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_B = -\mathbf{p}_A \quad (15)$$

即等效质点的动量等于质点 B 的动量或质点 A 动量的逆矢量.

角动量守恒

由式 15 可得二体系统总角动量为

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{p}_A + \mathbf{r}_B \times \mathbf{p}_B = \mathbf{R} \times \mathbf{p} \quad (16)$$

即二体系统的总角动量等于等效质点的角动量.

如果两个质点之间的相互作用力沿它们连线的方向, 那么所有两个力都经过质心, 即都不受任何力矩, 所以系统角动量守恒.

二体碰撞

预备知识 二体系统^[273]

注意以下讨论的碰撞不必要求在一瞬间发生, 可以拓展到有限距离的作用力甚至无穷远但不断衰减的作用力. 例如考虑两个带电荷的质点的碰撞. 在无穷远处时, 二者之间的作用可忽略, 此时的速度可定义为初速度. 当发生相互作用后, 把两质点互相远离到相距无穷远时的速度定义为末速度.

一维情况

高中物理中, 若两质点的运动限制在同一直线上且碰撞为完全弹性碰撞, 我们可以联立能量守恒和动量守恒两条式子来解出碰撞后的速度. 但这里介绍另一种更简单的方法, 即利用质心系求解. 为了区别于质心系, 我们把原参考系叫做**实验室参考系** (简称为实验系). 令两质点质量分别为 m_1 和 m_2 , 实验系中初速度分别为 v_{10} 和 v_{20} , 需要求实验系中的末速度 v_1 和 v_2 . 根据定义, 系统质心的位置为 $x_c = (m_1x_1 + m_2x_2)/(m_1 + m_2)$, 等式两边对时间 t 求导, 得质心的速度为

$$v_c = (m_1v_1 + m_2v_2)/(m_1 + m_2) \quad (1)$$

现在我们在质心系中考虑该问题. 在三维情况下, 质心系中的二体系统只有三个自由度 (式 3^[273]), 不难类推在一维情况下二体系统只有一个自由度. 所以无论维度多少, 在质心系中考虑二体碰撞问题将会简单得多.

由速度叠加原理, 初始时两质点在质心系中的速度分别为

$$v_{c10} = v_{10} - v_c \quad v_{c20} = v_{20} - v_c \quad (2)$$

先考虑质心系中的完全弹性碰撞, 由于两质点的速度大小始终成正比 (质心系^[250]式 29), 为了使能量守恒, 碰撞只能有一种结果, 即两质点的速度方向都

取反方向而速度大小保持不变. 现在我们重新回到实验系中, 两质点的末速度分别为

$$v_1 = v_c + (-v_{c10}) = 2v_c - v_{10} \quad v_2 = v_c + (-v_{c20}) = 2v_c - v_{20} \quad (3)$$

代入式 1 即可得到最后结果.

若问题为非完全弹性碰撞, 可设质心系中碰撞后与碰撞前的能量比值为 $\alpha^2 < 1$, 即速度的比值为 α . 碰撞后两质点的质心系速度分别变为 $-\alpha v_{c10}$ 和 $-\alpha v_{c20}$, 变换到实验系中速度为

$$\begin{aligned} v_1 &= v_c + (-\alpha v_{c10}) = (1 + \alpha)v_c - \alpha v_{10} \\ v_2 &= v_c + (-\alpha v_{c20}) = (1 + \alpha)v_c - \alpha v_{20} \end{aligned} \quad (4)$$

三维的情况

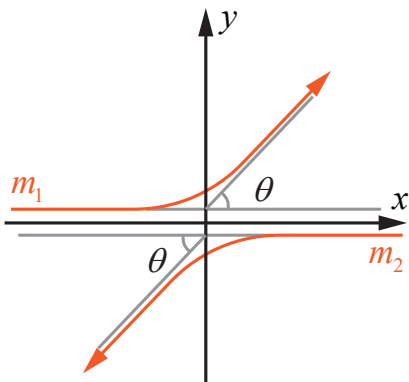


图 1: 质心系中的二体碰撞

由于在多维情况下, 碰撞损失的能量可能与碰撞的角度有关, 这里仅讨论最常见的完全弹性碰撞. 碰撞的轨迹如图 1 所示. 由于质心系中系统的总动量始终为 0 (质心系^[250]式 29), 初状态和末状态中两质点的速度方向相反, 但延长线一般不重合 (否则就变为上面的一维情况). 质点末状态速度与初状态速度的夹角叫做**散射角 (scattering angle)**. 注意质心系中两质点散射角相同, 而实验系中两散射角不必相同. 求散射角需要知道具体的作用力形式, 以下讨论假设我们已知质心系中的散射角. 若两质点间的相互作用力与两点的连线共线, 那么质心系中两质点的运动轨迹将始终在同一平面上, 而这在实验系中一般不成立 (当两个质点的入射延长线为两条不平行且不相交的直线时).

令质量分别为 m_1 和 m_2 的两质点初始速度为 \mathbf{v}_{10} 和 \mathbf{v}_{20} ，为了方便，我们规定质心系的 x 轴与第一个质点在质心系中的入射方向相同，则质心系中的初始速度分别为

$$\mathbf{v}_{c10} = (v_{10} - v_c)\hat{\mathbf{x}} \quad \mathbf{v}_{c20} = (-v_{20} - v_c)\hat{\mathbf{x}} \quad (5)$$

其中质心速度为

$$\mathbf{v}_c = (m_1 v_1 + m_2 v_2)\hat{\mathbf{x}} / (m_1 + m_2) \quad (6)$$

完全弹性碰撞说明能量守恒，类比一维的情况可得质心系中两质点末速度的大小分别等于初速度大小。所以末速度分别为

$$\mathbf{v}_{c1} = (v_{10} - v_c)(\hat{\mathbf{x}} \cos \theta + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta) \quad \mathbf{v}_{c2} = -(v_{20} + v_c)(\hat{\mathbf{x}} \cos \theta + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta) \quad (7)$$

最后再变换到实验系，得末速度分别为

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{c1} \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{c2} \quad (8)$$

刚体的绕轴转动 转动惯量

预备知识 刚体^[257]，角动量定理^[271]

刚体的绕轴转动

若刚体绕固定轴转动，那么刚体的位置只需一个变量即可完全确定（一个自由度），我们令该变量为转角 θ 。 θ 关于时间 t 的导数就是刚体绕轴旋转的角速度 ω 。我们还可以定义角速度 ω 关于时间的导数（即 θ 关于时间的二阶导数）为角加速度，记为 α 。

我们可以把刚体的绕轴转动类比质点的直线运动，把 θ ， ω 和 α 分别类比为直线运动中的位置 x ，速度 v 和加速度 a ，因为后三个变量之间的数学关系是完全相同的。于是我们可以立即得到匀变速转动（即 α 为常数）的一些公式，如

$$\theta = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (1)$$

$$\omega_1^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta \quad (2)$$

在以上三个标量的基础上，我们可以定义它们的矢量形式 θ , ω 和 α ，令它们的方向为转轴的方向，用右手定则^[13]来判断。

要判断刚体上任意一点的速度，使用式 5^[203] 即可（见图 1）

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3)$$

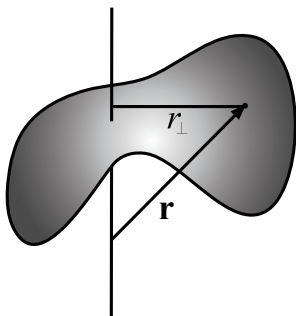


图 1: 刚体绕轴旋转时任意一点的线速度

角动量与转动惯量

设刚体绕固定轴转动，令轴的方向为 \hat{z} 。假设轴光滑，则轴对刚体可施加 x, y 两个方向的力矩，却不能施加 z 方向的力矩。所以根据角动量定理，角动量 \mathbf{L} 的 z 分量 L_z 守恒。我们下面来推导 L_z 与角速度 ω 的关系。矢量 \mathbf{L} 与矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的关系见惯性张量^[288]。

对于单个质点， $L_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \hat{z}$ 。首先把质点的位矢在水平方向和竖直方向分解， $\mathbf{r} = \mathbf{r}_z + \mathbf{r}_\perp$ 。由于 \mathbf{p} 一直沿水平方向，根据叉乘的几何定义， $\mathbf{r}_z \times \mathbf{p}$ 也是沿水平方向，只有 $\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{p}$ 沿 z 方向。另外，在圆周运动中，半径始终与速度垂直，所以 \mathbf{r}_\perp 始终与 \mathbf{p} 垂直。得出结论

$$L_z = |\mathbf{r}_\perp| |\mathbf{p}| = mr_\perp v = mr_\perp^2 \omega \quad (4)$$

若把刚体分成无数小块，每小块的质量分别为 m_i ，离轴的距离 $r_{\perp i} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ ，则刚体的角动量 z 分量为

$$L_z = \omega \sum_i m_i r_{\perp i}^2 \quad (5)$$

用积分写成

$$L_z = \omega \int r_{\perp}^2 dm = \omega \int r_{\perp}^2 \rho dV \quad (6)$$

定义刚体绕固定轴旋转的转动惯量为

$$I = \int r_{\perp}^2 dm \quad (7)$$

(注意角动量的大小不仅取决于刚体的质量分布, 还取决于转轴的位置和方向) 则刚体沿轴方向的角动量为

$$L_z = I\omega \quad (8)$$

现在来看“角动量定理^[271]”的式 1, 注意等号两边是矢量, 所以各个分量必须相等, 我们有

$$\frac{dL_z}{dt} = \tau_z \quad (9)$$

将式 8 代入式 9, 并利用角加速度的定义得

$$I\alpha = \tau_z \quad (10)$$

这就是刚体绕轴转动的动力学方程, 其形式可类比牛顿第二定律^[220].

例 1 刚体摆

如图 2, 已知质量为 M 的薄片绕某点的转动惯量为 I , 转轴到刚体质心的长度为 r_c , 转轴和质心的连线与竖直方向夹角为 θ , 求刚体的运动方程.

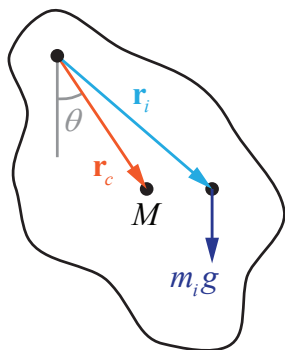


图 2: 刚体摆

首先我们把刚体看做质点系, 以转轴为原点计算刚体的合力矩为 (由于这

是一个平面问题，力矩必然垂直于该平面)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{g}) = \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g} = M \mathbf{r}_c \times \mathbf{g} \\ &= M g r_c \sin \theta\end{aligned}\quad (11)$$

这就说明，刚体所受力矩相当于质量为 M ，长度为 r_c 的单摆所受的力矩。代入式 10 得刚体摆的运动方程为

$$I \ddot{\theta} = M g r_c \sin \theta \quad (12)$$

可以验证当刚体的质量全部集中在质心时 ($I = M r_c^2$) 我们就得到了单摆的运动方程式 4 [236]。

习题 1 陀螺进动的角速度

在“角动量定理[271]”的例 2 中，如果除 r_0, m, g 外，还知道陀螺的转动惯量为 I 和陀螺的角速度 ω ，试证明陀螺进动的角速度为

$$\Omega = \frac{m g r_0}{I \omega} \quad (13)$$

注意进动角速度与陀螺倾角 θ 无关。

平行轴定理与垂直轴定理

预备知识 转动惯量[278]

平行轴定理

若我们已知刚体关于一个通过其质心的轴（称为质心轴）的转动惯量为 I_0 ，那么我们可以通过平行轴定理简单地求出刚体关于另一个与质心轴平行的轴的转动惯量 I ，而无需重新算一次定积分。令两个轴之间的距离为 R ，刚体质量为 M ，则计算公式为

$$I = I_0 + M R^2 \quad (1)$$

要证明该式，我们把刚体看做质点系，令质心轴到质点 m_i 的垂直矢量为 \mathbf{r}_i ，平行轴到质心轴的垂直矢量为 \mathbf{R} ，则刚体关于平行轴的转动惯量为

$$I = \sum_i m_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}_i)^2 = R^2 \sum_i m_i + \sum_i m_i r_i^2 + 2\mathbf{R} \cdot \sum_i m_i \mathbf{r}_i \quad (2)$$

由于质心轴经过刚体的质心，上式最后一项中的求和为零（式 28 [250]），而右边第二项恰好是 I_0 ，右边第一项中 $\sum_i m_i = M$ ，立即可得式 1。证毕。

垂直轴定理

若我们要求一个刚体薄片关于一条与其垂直的轴（称为**垂直轴**）的转动惯量 I ，我们可以在薄片上取两个互相垂直且与垂直轴相交的轴并分别计算薄片关于这两条轴的转动惯量 I_x 和 I_y 。这样就有

$$I = I_x + I_y \quad (3)$$

要证明该式，我们建立空间直角坐标系，令垂直轴与 z 轴重合，另外两条轴分别与 x 轴和 y 轴重合。把刚体看做质点系，令质点 m_i 的坐标为 $(x_i, y_i, 0)$

$$I = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_x + I_y \quad (4)$$

证毕。

常见几何体的转动惯量

预备知识 转动惯量^[278]

细圆环 薄圆柱环

细圆环和薄圆柱环的所有质量与转轴的距离都为 R ，可以看成许多质点的叠加，每个质点转惯量为 $m_i R^2$ ，所以

$$I = \sum_i m_i R^2 = MR^2 \quad (1)$$

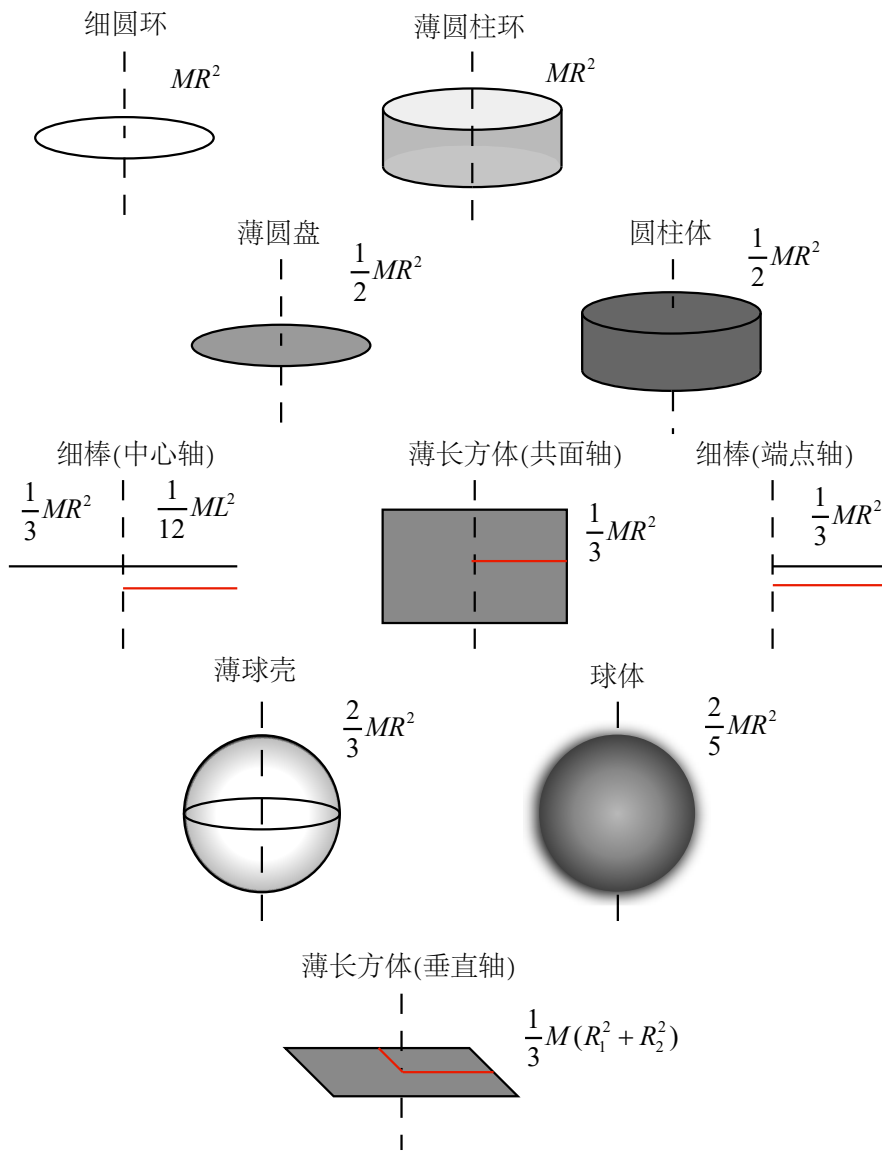


图 1: 常见几何体的转动惯量, 虚线为转轴, 物体质量 M 均匀分布, R 为几何体的半径或红线标注的长度.

细棒 (端点轴)

细棒的线密度为 $\lambda = M/L$, 如果划分成长度为 dr 的小段, 第 i 段距离转轴 r_i

细棒（中心轴）薄长方体（共面轴）

细棒（中心轴）可以看做两个等质量的细棒（端点轴），质量都为 M_1 ，每个具有转动惯量 $M_1 R^2/3$ ，总转动惯量为 $2M_1 R^2/3 = MR^2/3$ 。由此可以看出，若一个物体可以拆分成转动惯量相同的若干部分，那么转动惯量公式不变。薄长方体（共面轴）可以看成许多细棒（中心轴）组成，所以转动惯量的系数仍然为 $1/3$ 。注意一些教材中使用细棒的总长度 $L = 2R$ ，则转动惯量为

$$I = \frac{1}{12} ML^2 \quad (2)$$

薄圆盘 圆柱

薄圆盘可以看做许多宽度为 dr 的细圆环组成⁶，质量面密度为 $\sigma = M/(\pi R^2)$ ，第 i 个圆环的半径为 r_i ，面积为 $2\pi r_i dr$ ，总转动惯量为

$$I = \sum_i r_i^2 dm_i = \sum_i r_i^2 \cdot \sigma \cdot 2\pi r_i dr = 2\pi\sigma \sum_i r_i^3 dr = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr \quad (3)$$

也可以在极坐标中直接根据定义写出积分

$$I = \int r^2 \sigma ds = \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma r^2 \cdot r dr d\theta = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \sigma \pi R^2 R^2 = \frac{1}{2} MR^2 \quad (4)$$

圆柱可看做由许多相同的薄圆盘组成，转动惯量系数相同。

薄球壳

球壳可以看做由许多细圆环组成，质量面密度为 $\sigma = M/(4\pi R^2)$ ，球坐标中，令第 i 个圆环对应的极角为 θ ，宽度为 $R d\theta$ ，面积为 $ds_i = 2\pi R \sin \theta_i \cdot R d\theta$ ，半径为 $r_i = R \sin \theta_i$ ，总转动惯量为

$$\begin{aligned} I &= \sum_i r_i^2 dm_i = \sum_i R^2 \sin^2 \theta_i \cdot \sigma \cdot 2\pi R \sin \theta_i \cdot R d\theta \\ &= 2\pi\sigma R^4 \sum_i \sin^3 \theta_i d\theta = 2\pi\sigma R^4 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \end{aligned} \quad (5)$$

⁶然而不能看做由许多过圆心的细棒组成，因为这样面密度就是不均匀的。另外注意每个细环的转动惯量并不相同（因为半径各不相同），所以不能直接用圆环的转动惯量公式。

也可以在球坐标中直接写出球面积分

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 \sigma \, ds = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (R \sin \theta)^2 \sigma R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi \sigma R^4 \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \\ &= 2\pi \sigma R^4 \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta) \, d \cos \theta = \frac{2}{3} (\sigma 4\pi R^2) R^2 = \frac{2}{3} M R^2 \end{aligned} \quad (6)$$

其中对 θ 的积分使用了换元积分法.

球体

球体可以看做由许多薄球壳组成, 体密度为 $\rho = M/(4\pi R^3/3)$, 令第 i 个球壳半径为 r_i , 厚度为 dr , 体积为 $4\pi r_i^2 dr$, 总转动惯量为

$$I = \sum_i \frac{2}{3} m_i r_i^2 = \frac{2}{3} \sum_i \rho V_i r_i^2 = \frac{2M}{R^3} \sum_i r_i^4 dr = \frac{2M}{R^3} \int_0^{+\infty} r^4 dr \quad (7)$$

也可以在球坐标中直接体积分

$$\begin{aligned} I &= \int (r \sin \theta)^2 \, dm = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R (r \sin \theta)^2 \sigma r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{3M}{2R^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^R r^4 \, dr = \frac{2M}{R^3} \int_0^R r^4 \, dr = \frac{2}{5} M R^2 \end{aligned} \quad (8)$$

其中对 θ 的积分使用了换元积分法.

薄长方体 (垂直轴)

由“薄长方体 (共面轴)”可知两个共面方向的转动惯量分别为 $MR_1^2/3$ 和 $MR_2^2/3$, 使用平行轴定理可得关于垂直轴的转动惯量为二者之和

$$I = \frac{1}{3} (MR_1^2 + MR_2^2) \quad (9)$$

另外由于长方体可以看作许多薄片延轴方向叠加, 其转动惯量公式也相同.

刚体的平面运动方程

预备知识 动量定理^[262], 转动惯量^[278]

任意惯性系中, 若刚体质量为 M , 质心为 \mathbf{r}_c , 刚体受若干个力 \mathbf{F}_i , 作用点分别为 \mathbf{r}_i , 若刚体只延一个固定的方向转动 (如刚体的二维运动), 且该方向关于质心的转动惯量为 I , 则质心运动方程和绕质心转动的方程分别为

$$M\mathbf{a}_c = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (1)$$

$$I\boldsymbol{\alpha} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c) \times \mathbf{F}_i \quad (2)$$

其中 \mathbf{a}_c 是质心的加速度, $\boldsymbol{\alpha}$ 是绕质心转动的角加速度. 这是说, 我们可以把刚体的运动分解成质心的移动和相对质心的转动, 并用合力计算前者, 用关于质心的合力矩计算后者.

推导

我们把刚体看做质点系来证明, 在任意惯性系中, 由动量定理, 刚体总动量, 即质心动量 \mathbf{p}_c 的变化率为

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_c = M\mathbf{a}_c = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (3)$$

现在我们用角动量定理证明式 2. 由于质心与刚体的相对位置不变, 质心系中刚体必须绕质心转动, 且角动量为 (式 8^[278]) $\mathbf{L}_c = I\boldsymbol{\omega}$, 角动量变化率为⁷

$$\frac{d\mathbf{L}_c}{dt} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I\boldsymbol{\alpha} \quad (4)$$

要特别注意的是, 除非合力为零, 质心系并不是惯性系, 所以使用角动量定理要考虑刚体的惯性力. 但幸运的是质心系中惯性力 (式 5^[240]) $-m_i\mathbf{a}_c$ 产生的合力矩为零^[250]

$$\sum_i \mathbf{r}_{ci} \times (-m_i\mathbf{a}_c) = \mathbf{a}_c \times \sum_i m_i\mathbf{r}_{ci} = \mathbf{0} \quad (5)$$

⁷注意第一步成立的条件是 I 不变, 而一般情况下 I 与刚体的转轴有关, 所以只能假设刚体延同一方向转动. 唯一的例外是物体的转动惯量与方向无关的情况, 例如球体. 刚体的变向转动较为复杂, 不做讨论.

现在我们可以继续角动量定理^[271] 得

$$I\alpha = \sum_i \mathbf{r}_{ci} \times \mathbf{F}_i \quad (6)$$

由于质心系相对于任何惯性系没有相对转动，所以在任意惯性系中刚体的角加速度仍然为 α 。但受力点的位矢变为 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_{ci}$ ，即

$$I\alpha = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c) \times \mathbf{F}_i \quad (7)$$

例 1 球体或圆柱延斜面无摩擦滚动

如图 1，在一个倾角为 θ 的斜面上，一个半径为 R 质量为 M 的均匀的球体（或圆柱）从静止开始向下滚动，其转动惯量为 I ，求质心的加速度和滚动的角加速度。

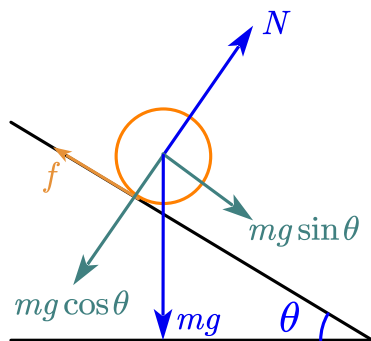


图 1: 圆柱延斜面无摩擦滚动

解：首先，根据无摩擦的条件，系统只有一个自由度^[249]，即圆柱的位移或者转角，二者的关系为

$$s = R\theta \quad (8)$$

两边求二阶导数，得加速度与角加速度的关系为

$$a = R\alpha \quad (9)$$

受力分析如图，圆柱受三个力：重力，支持力和静摩擦力。将物体受到的重力分解为垂直斜面方向和沿斜面方向的两个分力。其中垂直方向的分力与斜面提供的支持力抵消，而平行方向的分量和摩擦力的合力决定质心的加速度式 1

$$mg \sin \theta - f = Ma \quad (10)$$

再来分析关于质心的转动，由于重力和摩擦力都在质心，所以对合力矩贡献为 0。所以只有摩擦力的贡献为 $\tau = fR$ ，由式 2 得

$$I\alpha = fR \quad (11)$$

由式 9 到式 11 三式解得加速度为

$$a = \frac{g \sin \theta}{1 + I/(MR^2)} \quad (12)$$

可见转动惯量为 0 时，结果与无摩擦滚动一致。而转动惯量越大，加速度就越小。

例 2

一根质量为 M 长为 L 的均匀细棒延 y 方向静止放置在水平面 xy ，从 $t = 0$ 时起在其上端施加一个 x 方向的恒力，描述细棒如何运动。如果木棒与地面的摩擦系数为 μ ，答案又如何？

首先考虑质心的运动，细棒所受外力只有一个恒力，所以由式 1 质心沿 x 方向做匀加速运动。再来看质心系中细棒的转动由“转动惯量^[278]”中例 1 可知细棒绕其质心做单摆运动。

惯性张量

预备知识 常见几何体的转动惯量^[282]，张量^[?]，瞬时转轴^[292]

我们已经初步学习了刚体绕固定轴的转动，现在我们做一个更一般的讨论，也就是刚体绕某个固定点的转动。刚体绕固定轴转动只有一个自由度 θ ，而绕固定点转动却可以有 3 个自由度（见“刚体^[257]”）。

惯性张量

刚体绕固定点旋转的角动量等于惯性张量 \mathbf{I} 乘以瞬时角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \quad (1)$$

惯性张量是一个 3 维方阵，其阵元一般记为

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (2)$$

我们现在假设刚体绕坐标原点旋转，如果将 x, y, z 分别记为 x_1, x_2, x_3 ，则 \mathbf{I} 的矩阵元可以通过体积分计算

$$I_{ij} = \delta_{i,j} \int r^2 \rho(\mathbf{r}) dV - \int x_i x_j \rho(\mathbf{r}) dV \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3)$$

其中 \mathbf{r} 是刚体上某点的位置矢量^[198]， $r = |\mathbf{r}|$ 。也可以表示成矩阵积分的形式，即对每个矩阵元分别积分

$$\mathbf{I} = \int \rho(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} dV \quad (4)$$

可以看出，惯性张量与坐标系的选取有关，而这又可以划分为原点的位置和坐标轴的取向。

例 1 长方体的惯性张量

令重心在原点，密度为常数，质量为 M 的长方体延 x, y, z 方向的长度分别为 a, b, c ，那么有

$$\begin{aligned} \iiint xy \, dx \, dy \, dz &= \iiint yz \, dx \, dy \, dz = \iiint zx \, dx \, dy \, dz = 0 \\ \iiint x^2 \, dx \, dy \, dz &= \frac{1}{12} a^3 bc \\ \iiint y^2 \, dx \, dy \, dz &= \frac{1}{12} ab^3 c \\ \iiint z^2 \, dx \, dy \, dz &= \frac{1}{12} abc^3 \end{aligned} \quad (5)$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \frac{1}{12} \rho abc \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12} M \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

可以发现这个是一个对角矩阵. 这就意味着, 如果长方体分别绕 x, y, z 轴转动, 它的角动量也分别延 x, y, z 轴. 由式 9 [282] 可以验证三个方向的转动惯量是对的. 当转轴与坐标轴不重合时, 可见转动惯量的方向与转动方向一般不同.

特殊地, 当 $a = b = c$ (正方体) 时, 惯性张量变为单位矩阵乘以常数

$$\mathbf{I} = \frac{1}{6} M a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

由于单位矩阵乘以任何矢量都得到相同的矢量, 正方体延任意转轴转动时, 角动量都和角速度矢量成正比

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{6} M a^2 \boldsymbol{\omega} \quad (8)$$

例 2 细杆的角动量

假设细杆沿 x 轴放置, 长度为 L . 要计算它的惯性张量, 我们可以从头积分 (习题 1), 也可以假设细杆是一个细长的长方体, 直接用例 1 的结论 (令 $a = L, b \rightarrow 0, c \rightarrow 0$) 得

$$\mathbf{I} = \frac{1}{12} M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

可以看到, 如果转轴延 x 方向, 即 $\boldsymbol{\omega} = (\omega, 0, 0)^T$, 角动量为零, 如果延 y, z 方向, 则角动量大小都等于

$$L = \frac{1}{12} M L^2 \omega \quad (10)$$

对应的转动惯量为 $I = M L^2 / 12$, 这与式 2 [282] 一致.

习题 1

直接使用积分计算细杆的角动量 (式 9)。

推导

我们把刚体看作质点系刚体^[257], 刚体绕固定点转动时, 刚体上的每个点都在做瞬时圆周运动. 根据角动量的定义式 1^[269] 以及圆周运动的速度式 5^[203]

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega} - \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i \quad (11)$$

其中使用了“连续叉乘的化简^[154]”中的式 1. 将上式右边写成分量的形式, 并将求和表示为刚体密度 $\rho(\mathbf{r})$ 的积分得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} &= \int \rho r^2 \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} dV - \int \rho \begin{pmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} dV \\ &= \left[\int \rho \begin{pmatrix} r^2 - xx & -xy & -xz \\ -yx & r^2 - yy & -yz \\ -zx & -zy & r^2 - zz \end{pmatrix} dV \right] \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

对比式 1 可知, 方括号中的积分就是惯性张量 \mathbf{I} (式 4)。

坐标旋转变换

预备知识 空间旋转矩阵^[169]

上文中提到惯性张量矩阵与坐标系的选取有关, 我们先来讨论如果惯性张量在两个原点相同朝向不同的坐标系之间如何变换, 这叫做惯性张量的旋转变换. 先建立一个与刚体相对静止的参考系叫做体坐标系 (**body frame**), 一般我们选择体坐标系的原点在刚体质心处, 但刚体做任意转动时, 体坐标系并不是一个惯性系, 所以我们还要选一个惯性系, 即实验室坐标系 (**lab frame**). 令体坐标系的矢量到实验室系的矢量的变换矩阵^[169]为 \mathbf{R} , 记体坐标系和实验室系中的惯性张量分别为 \mathbf{I}_0 和 \mathbf{I} , 则实验室系中的惯性张量等于

$$\mathbf{I} = \mathbf{R} \mathbf{I}_0 \mathbf{R}^T \quad (13)$$

例 3

如果转轴和轻杆法线的夹角为 θ , (未完成)

坐标平移变换**瞬时转轴**

预备知识 刚体^[257]

瞬时转轴

当刚体绕某个固定点做任意转动时, 我们在每个时刻仍然能找到一个经过该点的**瞬时转轴**以及延转轴的瞬时角速度 (矢量) ω .

某时刻瞬时转轴的**定义**是: 该时刻刚体在内任意落在转轴上的点速度为零. 事实上, 我们只需要在某时刻找到刚体上瞬时速度为 0 的任意两个不同点, 就可以过这两点作出瞬时转轴, 并确保该直线上的所有点瞬时速度都为 0.

例 1 进动陀螺的瞬时转轴

在陀螺的例子 (例 2^[271]) 中, 我们可能会认为陀螺的瞬时转轴就是陀螺的轴. 但陀螺的轴时时刻刻都在运动, 除了与地面接触的点外, 任意一点的瞬时速度都不为 0.

如果陀螺的自转和进动的方向相同, 我们可以知道真正的瞬时转轴同样经过与地面的接触点, 但会在陀螺轴的上方. 我们只需要找到陀螺圆盘表面上瞬时速度为 0 的一点即可求出瞬时转轴的倾角.

刚体绕轴转动 2

预备知识 惯性张量^[288]

转轴提供的力矩

之前我们在讨论刚体绕固定轴转动时只涉及了角动量和力矩延轴方向的分量 L_z, τ_z . 在学习了惯性张量以后我们就可以开始讨论垂直轴方向的角动量和力矩了.

我们假设刚体与转轴之间无摩擦, 那么转轴就不可能给杆提供延轴方向的力矩, 但是却可以提供垂直方向的力矩, 这里记为 τ_a . 我们把所有外力对刚体的力矩记为 τ , 于是根据角动量定理有

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_a \quad (1)$$

之前我们看到, 刚体的运动完全是由外力矩的 z 分量 (延轴方向分量) τ_z 决定的, 所以我们可以断定 $\boldsymbol{\tau}$ 的任何垂直分量都被 $\boldsymbol{\tau}_a$ 中的“反作用力矩”抵消了⁸. 所以不失一般性, 我们接下来假设 $\boldsymbol{\tau}$ 与转轴共线.

再来看刚体的角动量 (注意不仅是 z 分量). 在学惯性张量时我们看到, 一般情况下角动量 \mathbf{L} 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 是不共线的. 我们来举一个例子.

===== 未完成 =====

例如把一个质量均匀分布的长杆倾斜固定在转轴上匀速旋转, 它绕轴旋转时的角动量始终垂直于长杆且随之一起转动. 这时运用角动量定理就会发现转轴必须给杆提供一个垂直于转轴的力矩.

刚体的动能定理

预备知识 刚体的平面运动方程^[285], 柯尼希定理^[264], 轻杆模型

如果我们把刚体^[257] 看作质点系, 那么系统中任意两个质点间距离保持不变, 我们可以假设这些质点之间以不可伸长的轻杆相连, 使它们不能相对运动.

平动动能与转动动能

⁸做一个类比, 假设质点只能沿光滑的轨道运动 (轨道可以是弯曲的), 那么只有外力延轨道的方向的分量能影响质点的运动, 垂直轨道方向的分量被轨道对质点的反作用力抵消了. 注意轨道给质点的力除了这个反作用力外, 还有一部分用于提供质点在垂直轨道方向的加速度分量.

预备知识 柯尼希定理^[264]

由柯尼希定理，刚体的动能可以分为平动动能和转动动能两部分。下面来证明一段时间内，平动动能的增加等于合外力关于质心位移的做功，而转动动能的增加等于质心系中合外力矩的做功。（未完成！）

刚体的运动方程

预备知识 刚体的平面运动方程^[285]，惯性张量^[288]

一般情况下刚体的运动方程要比平面运动复杂许多，但我们仍然可以将运动分解为质心的运动以及刚体绕质心的旋转，前者由合力决定，所以仍然有（式 1^[285]）

$$M\mathbf{a}_c = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (1)$$

所以相对于平面运动，该问题的困难在于绕质心转动的计算。虽然角动量定理仍然满足，但转动惯量将有可能随时间变化。这是因为刚体的瞬时转轴相对刚体的位置可能会随时间变化，而不同的转轴对应的角动量一般不同。

下面我们会看到，刚体绕固定点转动的角动量定理可以记为

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{I}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \quad (2)$$

对比平面运动的式 2^[285]，转动惯量变为了惯性张量，且多了一项角速度叉乘角动量。当二者共线时，叉乘为零，就回到了平面运动的式子。

转动方程

我们仍然可以用角动量定理来推导刚体的转动方程，但这里的角动量要用惯性张量来表示（式 1^[288] 和式 6^[288]）

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{R}^T\boldsymbol{\omega} \quad (3)$$

其中 \mathbf{I}_0 不随时间变化， \mathbf{L} 、 $\boldsymbol{\omega}$ 和 \mathbf{R} 都是时间的函数。代入角动量定理得（式 1^[271]）

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{I}}{dt}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{I}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{R}^T)\boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{R}^T\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \quad (4)$$

其中 $d\boldsymbol{\omega}/dt$ 是角加速度, 记为 $\boldsymbol{\alpha}$, 角速度和角加速度的关系可以类比速度和加速度^[202]. 另外注意这里对矩阵求导就是对每个元分别求导.

我们把力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 看作是一个关于时间的已知函数, 把旋转矩阵 \mathbf{R} 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 看做关于时间的未知函数 (即微分方程的解). \mathbf{R} 和 $\boldsymbol{\omega}$ 完整描述了刚体绕固定点转动的状态, 就像位置和动量可以完整描述了一个质点运动的状态.

另外, $\boldsymbol{\omega}$ 和 \mathbf{R} 之间的关系就速度和位移的关系, 假设体坐标系中固定在刚体上的任意一点坐标为 \mathbf{r} (不随时间变化), 变换到实验室坐标系中为 $\mathbf{R}\mathbf{r}$. 对时间求导得该点在实验室坐标系的速度为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}\mathbf{r} \quad (5)$$

而角速度和速度之间有 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}\mathbf{r})$ (式 5^[203]). 我们可以把叉乘用矩阵乘法表示为

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{R}\mathbf{r} \quad (6)$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

是一个反对称矩阵, 即

$$\boldsymbol{\Omega}^T = -\boldsymbol{\Omega} \quad (8)$$

由于 \mathbf{r} 是任意的, 对比式 5 和式 6 得

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{R} \quad (9)$$

现在我们可以化简式 4 第一项, 根据链式法则^[93] 和式 9, 式 8

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{I}}{dt}\boldsymbol{\omega} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{R}^T)\boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{d\mathbf{R}}{dt}\mathbf{I}_0\mathbf{R}^T\boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}\mathbf{I}_0\left(\frac{d\mathbf{R}^T}{dt}\right)\boldsymbol{\omega} \\ &= \boldsymbol{\Omega}\mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{R}^T\boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{R}^T\boldsymbol{\Omega}^T\boldsymbol{\omega} \\ &= \boldsymbol{\Omega}\mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{R}^T\boldsymbol{\omega} - \mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{R}^T\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega} \\ &= \boldsymbol{\Omega}\mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{R}^T\boldsymbol{\omega} \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \end{aligned} \quad (10)$$

其中使用了 $\Omega\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. 所以式 4 变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} + \mathbf{I}\boldsymbol{\alpha} \\ &= \Omega\mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{R}^T\boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{R}^T\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\end{aligned}\quad (11)$$

整理得 (注意 $\mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{R}^T$ 得逆矩阵是 $\mathbf{R}\mathbf{I}_0^{-1}\mathbf{R}^T$, \mathbf{I}_0^{-1} 是 \mathbf{I}_0 的逆矩阵)

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{R}\mathbf{I}_0^{-1}\mathbf{R}^T(\boldsymbol{\tau} - \Omega\mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{R}^T\boldsymbol{\omega})\quad (12)$$

式 9 和式 12 就是完整的运动方程. 这是一个一阶常微分方程组^[291], 写成标量的形式共有 12 条, 未知数分别为 $\omega_x, \omega_y, \omega_z, R_{i,j}$ 共 12 个.

事实上旋转矩阵 \mathbf{R} 其实只有三个独立的自由度, 如果我们能用三个变量表示 \mathbf{R} , 就可以得到只含 6 个未知数的 6 个方程. 一种方法是使用欧拉角, 但列出来后式子会比较复杂. 另一种方法是用 4 元数, 即用 4 个变量表示 \mathbf{R} , 可以得到形式相对简单的方程, 见“刚体运动方程 (四元数)^[296]”.

刚体运动方程 (四元数)

预备知识 刚体的运动方程^[294], 四元数与旋转矩阵^[175]

我们用四元数 \mathbf{q} 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ (共 7 个标量) 来表示刚体绕固定点旋转的运动状态. 下面来列运动方程 (7 元一阶微分方程组).

式 6^[175] 中已经给出了 4 条 (\mathbf{q} 关于时间的导数)

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{1}{2}[0, \boldsymbol{\omega}]\mathbf{q}\quad (1)$$

而之前的式 12^[294] 给出了另外 3 条 ($\boldsymbol{\omega}$ 关于时间的导数)

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{R}\mathbf{I}_0^{-1}\mathbf{R}^T(\boldsymbol{\tau} - \Omega\mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{R}^T\boldsymbol{\omega})\quad (2)$$

其中 \mathbf{I}_0 是体坐标系中的惯性张量, \mathbf{R} 是体坐标系到实验室坐标系的旋转矩阵, $\boldsymbol{\tau}$ 是力矩 (已知). 注意现在我们可以用四元数 \mathbf{q} 表示 \mathbf{R} (式 2^[175]). 这样就得到了所有的运动方程.

用数值计算来解这个方程见“刚体转动数值模拟^[297]”.

第五部分

附录

第一章

附录

小时百科符号与规范

这里列出本书中一些可能会产生歧义的符号以及规范，并给出对应词条的链接，如需补充，请与管理员协商。

数学

- 较长的整数可以使用逗号对每三位进行分割，如 2,456,789.
- 集合^[17]中 \subseteq 和 \subset 表示子集， \subsetneq 表示真子集，但应该尽量避免使用 \subset .
- 映射^[22]的分类使用[定义 1](#).
- 使用粗体与正体表示几何矢量^[133]，如 \mathbf{v} ，也可以用于表示列矢量或行矢量以及矩阵，矩阵一般用大写，如 \mathbf{A} 。唯一的例外是当符号是希腊字母时，使用粗斜体而不是粗正体，如 $\boldsymbol{\alpha}$ 。这与 Wikipedia 的规范一致（[例子](#)）。
- 在粗体与正体矢量上方加 hat 表示单位矢量，如 $\hat{\mathbf{x}}$.
- 虚数单位^[56]用正体的 i
- 自然对数底^[73]用正体的 e
- 也可以用狄拉克符号表示任意矢量空间的矢量，如 $|v\rangle$ ，对偶矢量如 $\langle v|$ ，内积如 $\langle u|v\rangle$.
- 如无声明词条默认使用国际单位制^[302]，若使用其他单位制，要在每个词条开头用脚注声明“本词条使用 xxx 单位制”。例如原子单位^[?]，厘米—克—秒^[305]，或高斯单位制^[?]。

数学分析

- 定义度量空间中序列**收敛**当且仅当它是柯西序列（[??](#) ^[?]）。

电动力学

- 使用 ϵ 而不是 ε 表示电介质常量.

相对论

- 用 γ 表示 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

统计力学

- Ξ 表示配分函数.
- k_B 表示玻尔兹曼常数.
- 如果温度使用能量单位, 意思是该温度 (开尔文温标) 乘以玻尔兹曼常数 $k_B T$.

国际单位制

¹国际单位制 (SI Units) 是一套国际通用的单位标准.

本文采用 2019 年 5 月 20 日开始生效的新国际单位标准, 该标准中的数值也被称为 2018 CODATA 推荐值 (Committee on Data for Science and Technology, 科学技术数据委员会). 在新标准中, 所有基本单位都可以通过 7 个预定义的物理常数来测定 (表 1^[302]). 以下的数值除了有特殊说明, 都是精确值 (无限位小数用省略号表示), 不存在误差.

时间: 秒 (s)

一秒等于铯 (Cs) 原子 133 基态的超精细能级之间的跃迁辐射的电磁波周期的 9, 192, 631, 770 倍.

说明: 我们知道原子中的电子具有不同的能级, 当电子从一个能级跃迁到一个更低的能级时, 会放出一个光子. 光子的频率为 $\nu = \varepsilon/h$, 其中 ε 是光子的能量, h 为普朗克常数.

¹参考 Wikipedia [相关页面](#)

长度：米 (m)

真空中，光在 $1/299792458$ 秒内传播的距离。

说明：由于真空中的光速是物质和信息能传播的最快速度（见狭义相对论^[221]相关内容），且在任何参考系中都相同，所以可以作为一个精确的标准。结合秒的定义，就可以通过实验得到一米的长度。根据米的定义，一秒中光可以在真空中传播

$$c = 299792458 \text{ m/s} \quad (1)$$

质量：千克 (kg)

千克的定义需要使得普朗克常数精确等于 $h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ Js}$ 。

说明：2019年5月开始，千克根据普朗克常数定义（见量子力学^[221]相关内容）。这个定义可以类比“米”的定义（使光速精确地等于 299792459 m/s ）： h 的单位 Js 也可以表示为 $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ，我们已经定义了“米”和“秒”，所以通过测量普朗克常数，我们就可以定义千克。

历史上，千克最初在 1795 年被定义为一升水的质量，但在实际操作中会遇到许多困难使结果不太精确。1799 年使用国际公斤原器的质量来定义，并复制若干份分别存放，但经过长时间后被发现和复制品存在细微误差。

力：牛顿 (N)

等于使 1 kg 物体获得 1 m/s^2 加速度的力。

说明：该定义符合牛顿第二定律（式 2^[220]）。

压强：帕斯卡 (Pa)

使 1 m^2 面积受力为 1 N 的压强。

能量：焦耳 (J)

1 N 的恒力将受力物体沿力的方向移动 1 m ，做功为 1 J 。

电荷：库仑 (C)

库伦的定义使得每个电子的电荷精确等于 $1.602176634 \times 10^{-19}$ C.

电压：伏特 (V)

伏特的定义使得 1 C 的电荷增加 1 V 电势，需要 1 J 的能量.

电容：法拉 (F)

法拉是电容量的单位，一个 1 F 的电容器两端施加 1 V 电压，可以储存 1 C 净电荷.

电流：安培 (A)

每秒钟流过某截面的的静电荷等于一库仑库伦.

磁场：特斯拉 (T)

磁场强度单位，可以由洛伦兹力 ($\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) 或安培力 ($\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$) 来定义.

电感：亨利 (H)

(未完成) 电感的单位.

温度：开尔文 (K)

开尔文温度的定义应该使得玻尔兹曼常数精确等于

$$k_B = 1.3806505 \times 10^{-23} \text{ J/K} \quad (2)$$

例如，理想气体中分子平均动能为 $\langle E_k \rangle = 3k_B T/2$ ，理论上我们可以根据测其动能来定义温度.

- 本词条存在未完成的内容.
- 每个常数连接到相应词条

预备知识 [国际单位制](#)^[300]

精确定义的常数

²2019年5月20日生效的国际单位制^[300]中精确定义了7个基本常数，每个基本单位的大小都可以由这些常数的定义测量出来。如果某个数值最后两位有误差，我们把不确定度写在括号中，例如1.23(45)表示 1.23 ± 0.45 。另外约

表 1: 精确定义的常数

符号	精确值	名称
ν_{Cs}	9, 192, 631, 770 Hz	铯原子 133 基态的超精细能级之间的跃迁辐射的电磁波频率
c	299, 792, 458 m/s	真空中的光速
h	$6.62607015 \times 10^{-34}$ Js	普朗克常数
e	$1.602176634 \times 10^{-19}$ C	元电荷
k_B	1.380649×10^{-23} J/K	玻尔兹曼常数
N_A	$6.02214076 \times 10^{23}$	阿伏伽德罗常数
K_{cd}	683 lm/W	540 THz 电磁波的照射效率

化普朗克常数定义为 $\hbar = h/(2\pi)$ 。

未完成: Kcd 这个常数有什么用?

力学

万有引力常数

$$G \approx 6.67430(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2} \quad (1)$$

²本词条参考 Wikipedia [相关页面](#)，以及 NIST 的 2018 CODATA [常数表](#)

电动力学

真空磁导率

$$\mu_0 \approx 1.25663706212(19) \times 10^{-6} \text{ H/m} \quad (2)$$

在 2019 年更新前，它被定义为 $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ 。现在 μ_0 可以通过测量精细结构常数^[29] 获得。

真空介电常数

$$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) \approx 8.8541878128(13) \times 10^{-12} \quad (3)$$

在 2019 年更新前，它被定义为 $1/(\mu_0 c^2)$ 。

量子力学

玻尔半径^[29]

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{\hbar}{\alpha m_e c} \approx 5.29177210903(80) \times 10^{-11} \text{ m} \quad (4)$$

精细结构常数^[29]

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 7.2973525693(11) \times 10^{-3} \quad (5)$$

玻尔磁子^[29]

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.2740100783(28) \times 10^{-24} \text{ J/T} \quad (6)$$

原子质量单位（仍然由 C12 定义）

$$m_u = 1.66053906660(50) \times 10^{-27} \text{ kg} \quad (7)$$

电子质量

$$m_e = 9.1093837015(28) \times 10^{-31} \quad (8)$$

质子质量

$$m_p = 1.67262192369(51) \times 10^{-27} \text{ kg} \quad (9)$$

中子质量

$$m_n = 1.67492749804(95) \times 10^{-27} \text{ kg} \quad (10)$$

统计力学

理想气体常数（精确）

$$R = k_B N_A = 8.31447165136438 \text{ J/K} \quad (11)$$

斯特藩—玻尔兹曼常数（精确）

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5.670374419 \dots \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4} \quad (12)$$

国际单位制词头

- 本词条存在未完成的内容.

预备知识 国际单位制^[302]

在使用国际单位时，我们会在一些单位符号或全称前面加上一个表示数量级的前缀，正式的名字叫做**国际单位制词头（metric prefix）**以方便书写。如长度单位 m（米）可以加不同的词头拓展成更小的单位 cm（厘米，centimeter），mm（毫米，millimeter），km（千米，kilometer）。

国际单位制共有 20 个词头，下面我们来看每个词头的全称和代表的数量级。

未完成：未完成：每个词头需要中文名

厘米—克—秒单位制

- 本词条处于草稿阶段.
- 错误：不应该用无量纲的物理公式那一套来讲解， x_c 明明具有量纲，应该修正一下转换常数的量纲
- 转换常数通常等于 1，但是有可能不是，例如电荷.
- 高斯单位制和 CGS 单位有什么区别？

表 1: 词头列表

全称	词头	数量级	全称	词头	数量级
deci	d	10^{-1}	deca	da	10^1
centi	c	10^{-2}	hecto	h	10^2
milli	m	10^{-3}	killo	k	10^3
micro		10^{-6}	mega	M	10^6
nano	n	10^{-9}	giga	G	10^9
pico	p	10^{-12}	tera	T	10^{12}
femto	f	10^{-15}	peta	P	10^{15}
atto	a	10^{-18}	exa	E	10^{18}
zepto	z	10^{-21}	zetta	Z	10^{21}
yocto	y	10^{-24}	yotta	Y	10^{24}

预备知识 物理量和单位转换^[196]，国际单位制^[300]

³厘米—克—秒单位制（centimetre-gram-second system of units）也简记为 CGS 单位制。我们将从 CGS 到 SI 单位制之间的转换常数记为 $\beta_{\text{物理量}}$ ，CGS 单位制的物理量符号用角标 c 加以区分。例如 $x = \beta_x x_c$ 其中 x 是国际单位制的物理量， x_c 是 CGS 单位的物理量。大部分情况下， $\beta_{\text{物理量}} = 1$

则 $\beta_x = 1 \text{ cm}$ ， $\beta_m = 1 \text{ g}$ ， $\beta_t = 1 \text{ s}$ 。为了满足 $a = \ddot{x}$ ，有

$$\beta_a = \beta_x / \beta_s^2 = 1 \text{ cm/s}^2 = 0.01 \text{ m/s} \quad (1)$$

为了满足牛顿定律

$$F = ma \quad (2)$$

代入得

$$\beta_F = \beta_m \beta_x / \beta_s^2 = 1 \text{ g} \cdot \text{cm/s}^2 = 1 \text{ dyn} = 1 \times 10^{-5} \text{ N} \quad (3)$$

其单位叫做达因（dyne），记作 dyn.

³参考 Wikipedia 相关页面.

小时百科图标

- 本词条存在未完成的内容.

小时百科的图标是由 4 条丝带组成 3D 立体图，从数学上来看，每条丝带的形状分别是一个高斯分布（正态分布）^[?]；物理上，四条丝带可以分别看作量子力学中自由粒子的高斯波函数随时间演化^[?]；艺术上，可以寓意为海浪。

目前图标分为立体版本（图 1）和扁平化版本（图 2）。

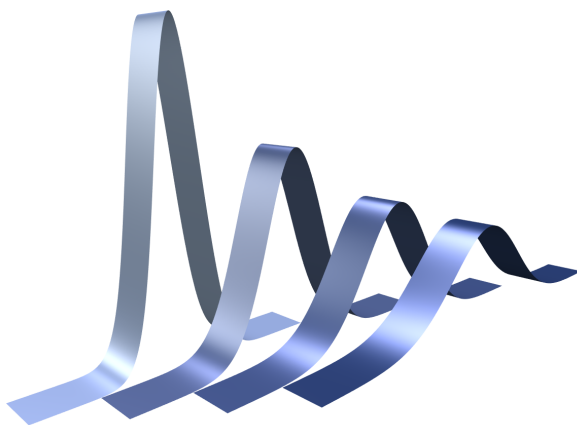


图 1: 立体图标，完成于 2014 年 10 月

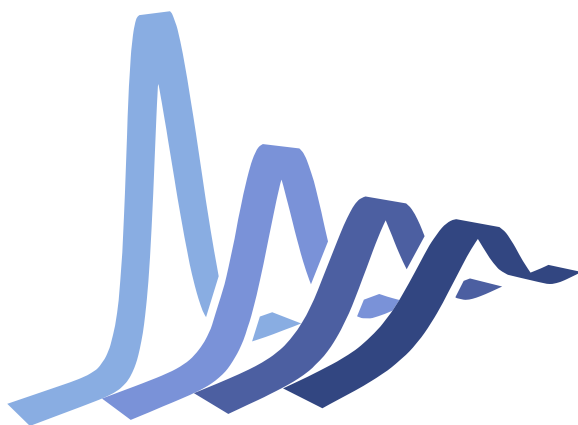


图 2: 扁平化图标，完成于 2020 年 9 月

参数

图标使用透视投影^[22]，每个带的长宽高分别在图 3 中标出。

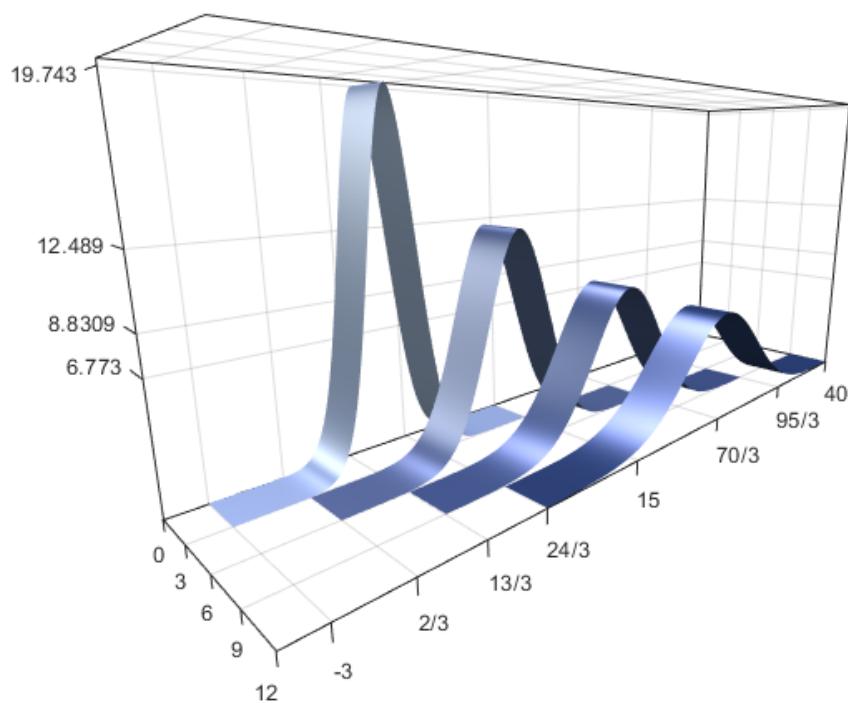


图 3: 图标参数

未完成：量子力学参数，相机参数，光源材质参数，Matlab 代码

参考文献

- [1] J. Hass, C. Heil, M. Weir, *Thomas' Calculus* 14ed
- [2] 同济大学数学系. 高等数学第六版
- [3] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right* 3ed
- [4] 同济大学数学系. 线性代数第五版
- [5] 梁灿杉, 周杉. 微分几何与广义相对论第二版

- [6] Arfken, Weber, Harris. *Mathematical Methods for Physicists - A Comprehensive Guide* 7ed
- [7] Walter Rudin. *Principle of Mathematical Analysis*
- [8] Eberhard Zeidler. *Applied Functional Analysis - Applications to Mathematical Physics*
- [9] Herbert Goldstein. *Classical Mechanics* 3ed
- [10] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程力学第二版
- [11] David Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4ed
- [12] 赵凯华, 陈熙谋. 新概念物理教程电磁学第二版
- [13] David Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, 4ed
- [14] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程量子物理第二版
- [15] R. Shankar. *Principles of Quantum Mechanics* 2ed
- [16] Eugen Merzbacher. *Quantum Mechanics* 3ed
- [17] J.J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics* Revised Edition
- [18] Brandsen, *Physics of Atoms and Molecules*, 2ed
- [19] Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Thermal Physics*
- [20] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程热学第二版
- [21] P. Peebles *Principles of Physical Cosmology*
- [22] Peskin. *An introduction To Quantum Field Theory*
- [23] 小时物理百科志愿者. 小时物理百科. <http://wuli.wiki>.